

ریاضی عمومی

رشته هنر

مدرس و مولف جزوه:

دکتر نوشاد

منبع:

ریاضی مقدماتی، آقای گرایه چیان



فصل هفتم:

* رابطه و تابع

* نمودار برخی از توابع حقیقی

جلسه پانزدهم: رابطه و تابع

رابطه و تابع :

تعریف ۱: هرگاه بین دو شیء a و b ترتیب در نظر بگیریم، آن را زوج مرتب نامیده و با نماد (a, b) نمایش می‌دهیم. a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامند.

تعریف ۲: حاصل ضرب دو مجموعه A و B را با نماد $A \times B$ نمایش داده و به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

تعریف ۳: هر زیر مجموعه $A \times B$ مانند R را یک رابطه از مجموعه A به مجموعه B می‌نامند $(R \subset A \times B)$.

مثال ۱: هرگاه $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۳, ۴\}$ باشد، مجموعه‌های زیر، رابطه‌هایی از A به

B می‌باشند.

$$R_۱ = \{(۲, ۳), (۲, ۴)\}$$

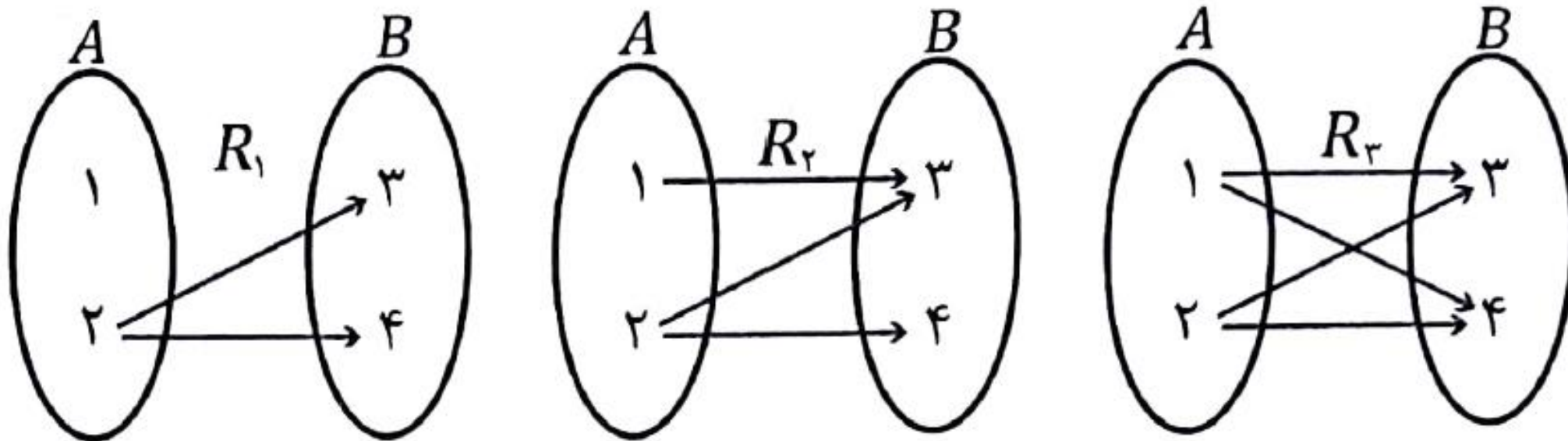
$$R_۲ = \{(۱, ۳), (۲, ۳), (۲, ۴)\}$$

$$R_۳ = A \times B = \{(۱, ۳), (۱, ۴), (۲, ۳), (۲, ۴)\}$$

انواع نمایش رابطه و تابع:

نمودار پیکانی:

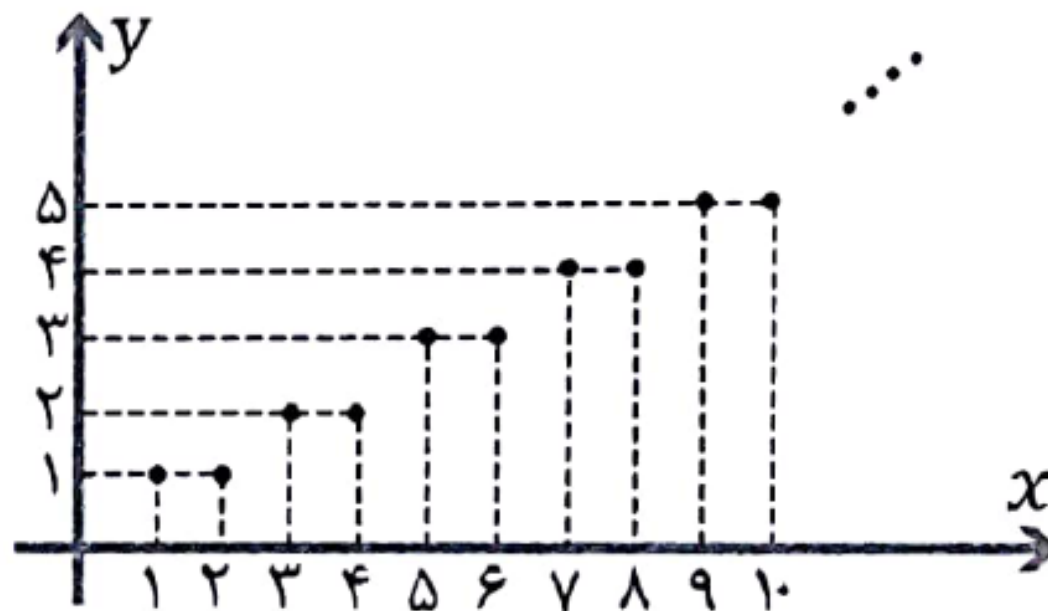
نمودار پیکانی رابطه‌های مثال قبل به صورت زیر می‌باشد.



مثال ۲: هرگاه $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد، مجموعه زیر یک رابطه از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$

می باشد.
 $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,2), (5,3), (6,3), \dots\}$

نمودار دکارتی مثال قبل به صورت زیر می باشد.



تابع و تشخیص آن از روی نمودار:

تعریف ۴: هر رابطه‌ای که هیچ دو زوج مرتب متمایز آن، دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشد، تابع می‌گویند.

نکته ۱: رابطه‌ای تابع است که اگر نمودار پیکانی آن را رسم کنیم از هر عضو مجموعه اول، حداکثر یک پیکان خارج شود.

نکته ۲: رابطه‌ای تابع است که اگر نمودار دکارتی آن را رسم کنیم هر خط موازی با محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۳: از دو رابطه زیر، R_1 تابع است ولی R_2 تابع نمی باشد.

$$R_1 = \{(1,2), (2,4), (3,5), (4,5)\}$$

$$R_2 = \{(1,2), (3,2), (4,5), (4,2)\}$$

دامنه و برد تابع :

تعریف ۵ : مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تابع f را دامنه تابع f می‌گویند و با D_f نشان می‌دهند. همچنین مجموعه تمام مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع f را برد تابع f می‌گویند و با R_f نشان می‌دهند.

$$D_f = \{x \mid (x, y) \in f\} \quad , \quad R_f = \{y \mid (x, y) \in f\}$$

مثال ۴: نظم توابع زیر را پیدا کرده و به زبان ریاضی بنویسید.

$$f = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9), (5,11), \dots\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$g = \{(0,1), (1,2), (2,5), (3,10), (4,17), \dots\} \subset \mathbb{W} \times \mathbb{N}$$

$$f = \{(x,y) \mid y = 2x + 1, x, y \in \mathbb{N}\}$$

حل:

$$g = \{(x,y) \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbb{W}, y \in \mathbb{N}\}$$

نمایش دیگر برای تابع : با توجه به اینکه در تابع f ، به هر x یک y منحصر بفرد نسبت می دهیم، لذا y را با نماد $f(x)$ نشان داده و آن را ضابطه یا قانون تابع می نامیم. توابع f و g مثال قبل را به صورت های زیر نشان می دهیم.

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & , \quad g: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N} \\ f(x) = 2x + 1 & g(x) = x^2 + 1 \end{array}$$

نمایش $f: A \rightarrow B$ را می خوانیم: « تابع f از A به B » همچنین مجموعه A را مجموعه مبدا و مجموعه B را مجموعه مقصد می گویند^(۱) و داریم: $D_f \subset A$ و $R_f \subset B$

مثال ۵: توابع زیر را ابتدا به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نوشته‌ایم، سپس دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده‌ایم.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$f = \{(3,1), (6,2), (11,3), (18,4), \dots\}$$

$$D_f = \{3, 6, 11, 18, \dots\} \quad , \quad R_f = \mathbb{N}$$

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$g(x) = |x| + 1$$

$$g = \{(0,1), (1,2), (-1,2), (2,3), (-2,3), \dots\}$$

$$D_g = \mathbb{Z} \quad , \quad R_g = \mathbb{N}$$

تابع پوشا:

تعریف ۶: هر گاه $f: A \rightarrow B$ یک تابع و برد آن مجموعه B باشد، یعنی داشته باشیم:
 $R_f = B$ ، آنگاه تابع f را پوشا می گویند.

مثال ۶: برای دو تابع f و g مثال قبل داریم: $R_f = \mathbb{N}$ و $R_g \neq \mathbb{Z}$. بنابراین f پوشا است ولی g پوشا نمی باشد.

تابع حقیقی:

تعریف ۷: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع حقیقی می‌نامیم. در توابع حقیقی تنها به ذکر ضابطه اکتفا می‌کنیم. بنابراین هرگاه تنها ضابطه تابع داده شده باشد، منظور تابع حقیقی است.

تعریف ۸: بزرگترین زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ که به ازای هر x در آن، $f(x)$ با معنا باشد، دامنه تابع حقیقی نامیده می‌شود.

مثال ۷: دامنه چند تابع در زیر مشخص شده است.

$$۱) f(x) = ۲x^۲ + ۳x - ۱ \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$۲) g(x) = \frac{x-۱}{x^۲-۲x} \quad , \quad D_g = \{x \mid x^۲ - ۲x \neq ۰\} = \mathbb{R} - \{۰, ۲\}$$

$$۳) h(x) = \sqrt{x^۲ + ۲x}$$

$$D_h = \{x \mid x^۲ + ۲x \geq ۰\} = (-\infty, -۲] \cup [۰, +\infty)$$

$$۴) k(x) = \frac{۱}{\sqrt[۴]{۵-|x|}}$$

$$D_k = \{x \mid ۵ - |x| > ۰\} = \{x \mid |x| < ۵\} = (-۵, ۵)$$

توابع مساوی :

تعرف ۹ : توابع f و g را توابع مساوی گویند هرگاه: الف) دامنه این دو تابع مساوی

باشند ($D_f = D_g = D$) ب) برای هر $x \in D$ داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

مثال ۸ : دو تابع حقیقی $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ و $g(x) = x - 1$ مساوی نیستند، زیرا

دامنه‌های نابرابر دارند: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R}$ (برای $x \neq 0$ داریم: $f(x) = g(x)$)

مثال ۹: دامنه دو تابع $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ برابر $\mathbb{R}$

می باشد، اما داریم:

$$g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

لذا ضابطه های دو تابع نابرابر است، در نتیجه f و g مساوی نمی باشند.

مثال ۱۰: دو تابع حقیقی $f(x) = \frac{x}{x^2(x-1)}$ و $g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ مساوی می باشند،

زیرا: $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ و برای هر $x \neq 0, 1$ داریم: $f(x) = g(x)$

تمرین:

(A) توابع زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید، سپس دامنه هریک را مشخص کنید.

$$۱) f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x) = x - 3$$

$$۲) f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x) = \sqrt{-x}$$

$$۳) f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$$

$$۴) f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$$

(B) دامنه توابع حقیقی زیر را مشخص کنید.

$$۱) f(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$$

$$۲) f(x) = x^4 - 3x + 1$$

$$۳) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$$

$$۴) f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-5}$$

$$۵) f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2-x}}$$

$$۶) f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$$

(c) تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

$$۱) f(x) = \tan x \cot x ,$$

$$g(x) = ۱$$

$$۲) f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} ,$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x^2}{x^2 - 4x}$$

$$۳) f(x) = \sqrt{x^2 - 4(x - 1)} ,$$

$$g(x) = |x - 2|$$

$$۴) f(x) = \cos^2 x ,$$

$$g(x) = \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2}$$