

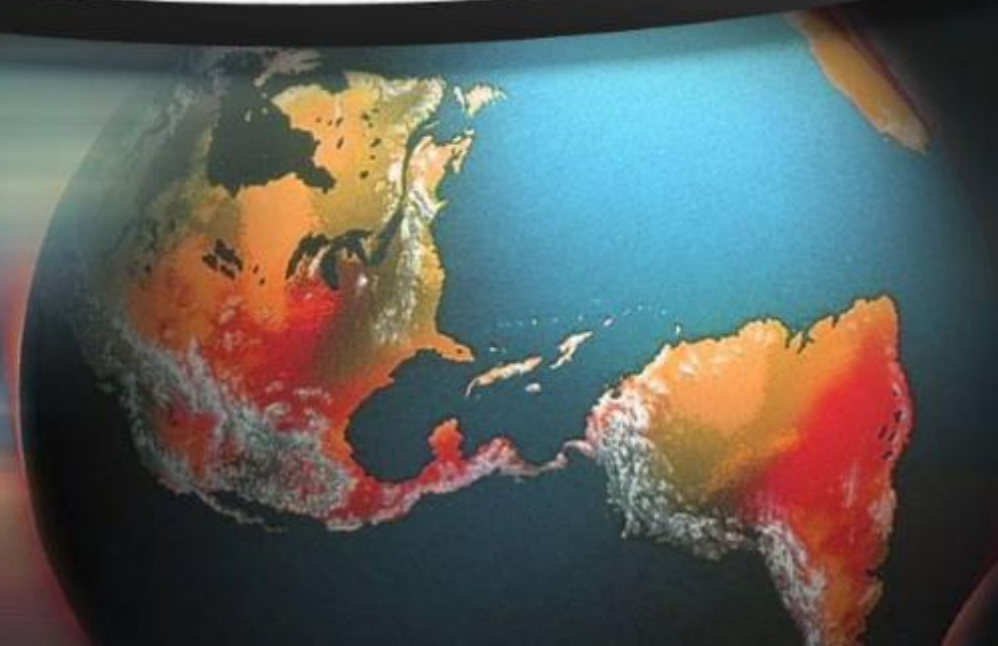
ریاضی عمومی رشته هنر

مدرس و مولف جزوه:

دکتر نوشاد

منبع:

ریاضی مقدماتی، آقای گرایه چیان



فصل ششم:

* خط راست

* دایره

* سهمی

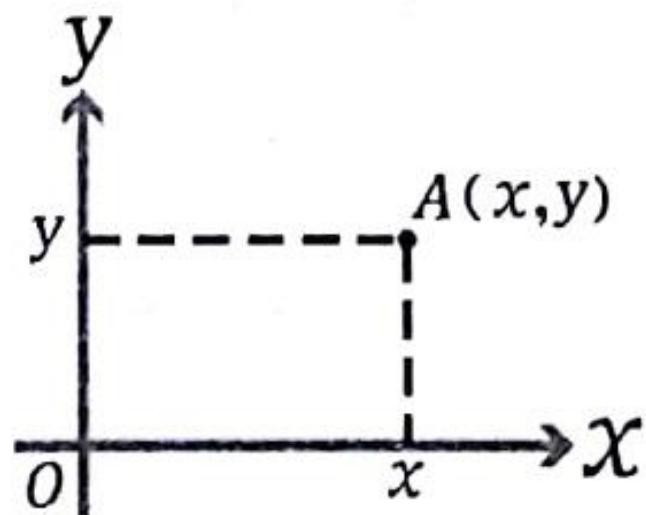
* بیضی

جلسه سیزدهم: خط و معادله خط

روابط بین خط و نقطه ، و معادله خط

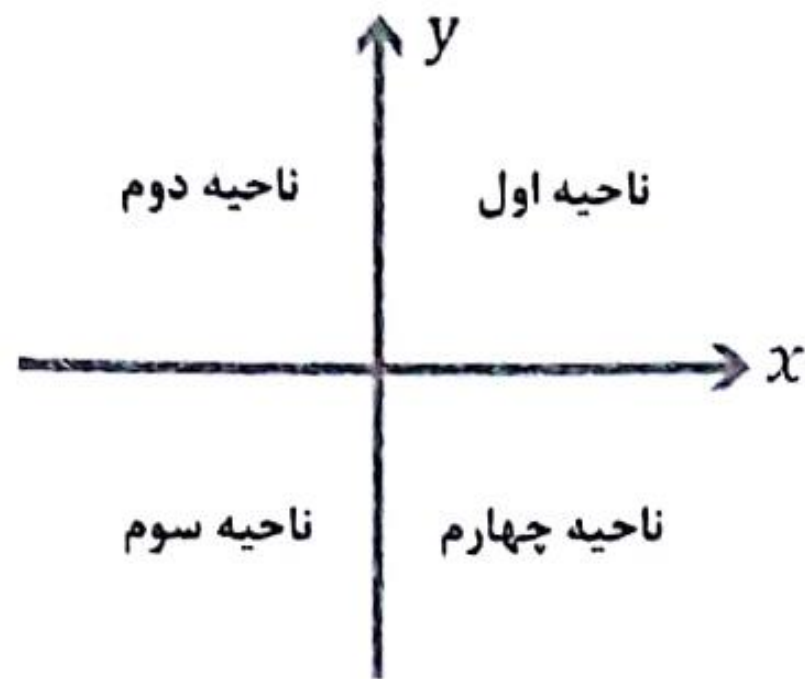
در این بخش، ابتدا مهمترین تعریفها و فرمولهای هندسه تحلیلی در فضای دو بعدی، یعنی صفحه را بیان می کنیم. سپس با ذکر مثالهایی، از مطالب گفته شده استفاده خواهیم کرد. لازم به تذکر است هر جا به اختصار کلمه خط را به کار بردیم، منظور خط راست می باشد.

دستگاه مختصات: دستگاه مختصات دکارتی^(۱) یا قائم از دو محور عمود بر هم



تشکیل شده است. محور افقی را محور طول‌ها یا x ها و محور قائم را محور عرض‌ها یا y ها می‌نامیم؛ و هر نقطه در صفحه را مانند شکل مقابل با زوج مرتب (x, y) نمایش می‌دهیم^(۲).

- محورهای مختصات، مجموعه نقاط صفحه را، به پنج مجموعه جدا از هم تقسیم می کند. این مجموعه ها عبارتند از:



نقاط ناحیه اول $(x > 0 \text{ و } y > 0)$ ،

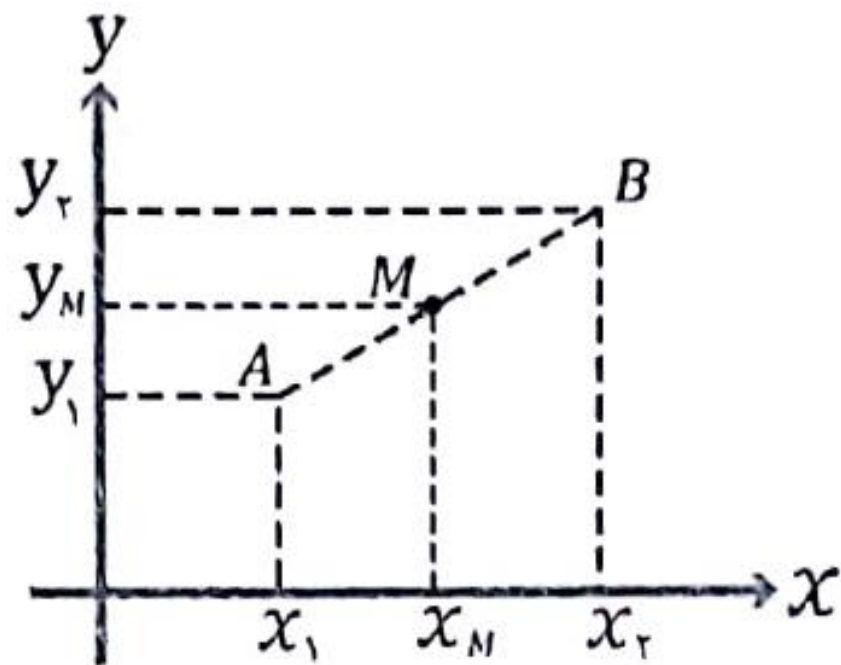
نقاط ناحیه دوم $(x < 0 \text{ و } y > 0)$ ،

نقاط ناحیه سوم $(x < 0 \text{ و } y < 0)$ ،

نقاط ناحیه چهارم $(x > 0 \text{ و } y < 0)$ و

نقاط واقع بر روی محورها $(x = 0 \text{ یا } y = 0)$.

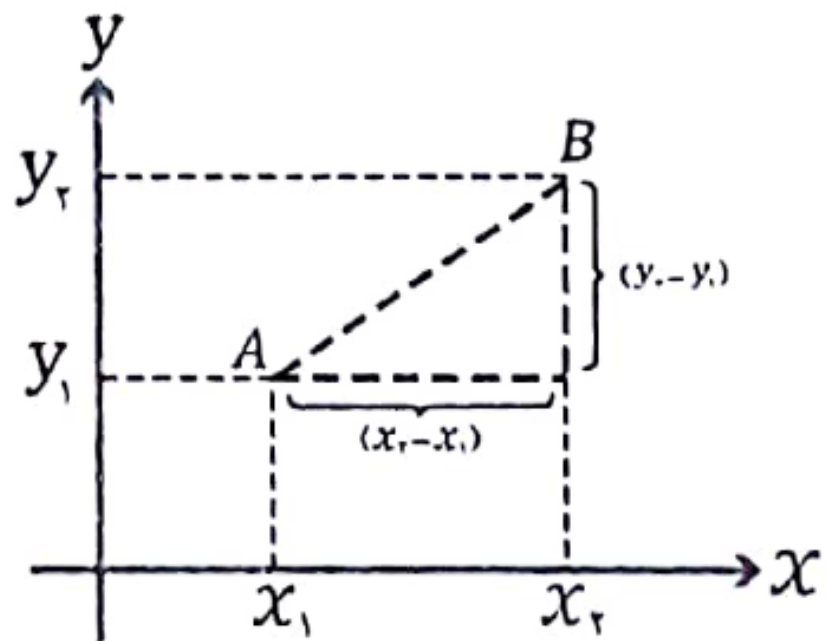
مختصات نقطه وسط یک پاره خط:



اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ مختصات دو سر یک پاره خط و M نقطه وسط این پاره خط باشد، مختصات نقطه M به صورت زیر محاسبه

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{می شود.}$$

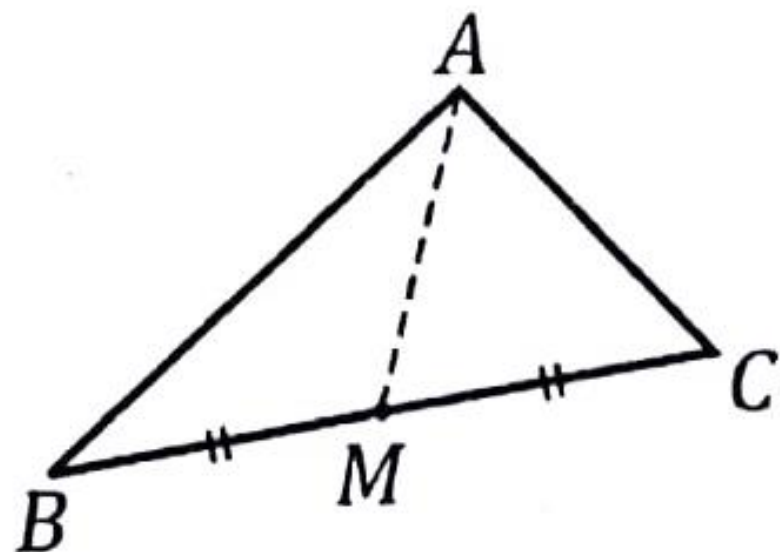
طول پاره خط:



اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو سر یک پاره خط باشند، فاصله این دو نقطه از فرمول زیر به دست می آید^(۱).

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

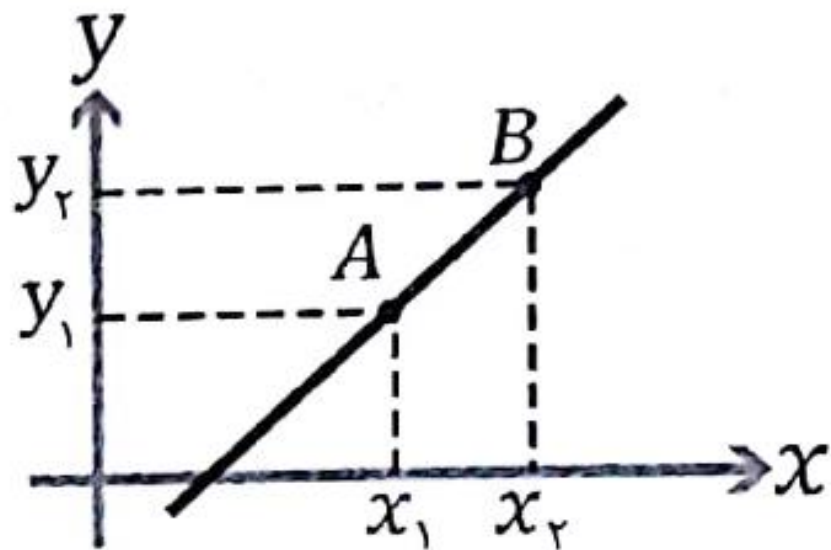
این فرمول به کمک رابطه فیثاغورس ثابت می شود.



میانه یک ضلع مثلث:

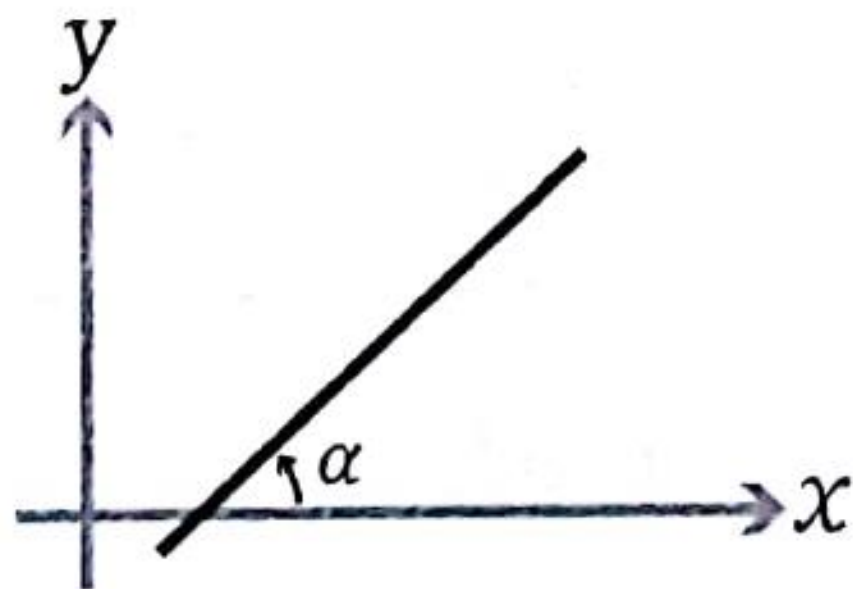
به پاره خطی که از یک رأس مثلث، به وسط ضلع مقابل آن رأس وصل می شود، میانه می گویند. یک مثلث دارای سه میانه است. ثابت می شود میانه ها همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

شیب خط :



هرگاه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه خط باشند، شیب یا ضریب زاویه خط را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$



- ثابت می شود شیب خط مقدار ثابتی است و به انتخاب نقاط A و B بستگی ندارد.

- هرگاه α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد، داریم:

$$m = \tan \alpha$$

مخطوط موازی و مخطوط عمود برهم:

اگر شیب خطهای L و L' را به ترتیب m و m' بنامیم:

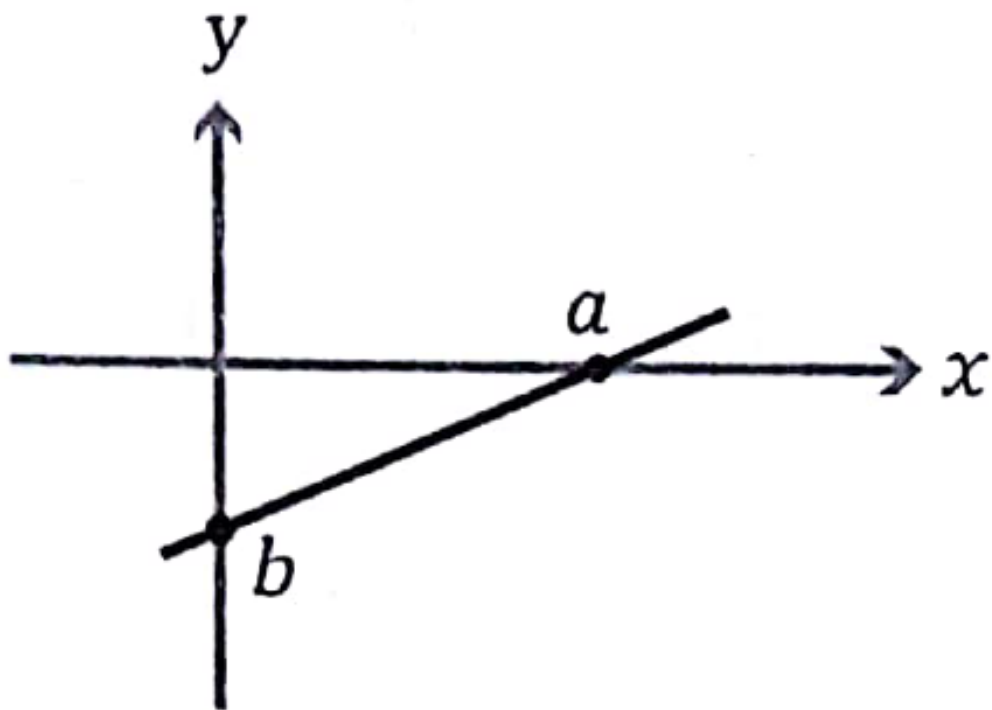
الف) اگر L و L' موازی باشند، آنگاه $m = m'$

ب) اگر L و L' بر هم عمود باشند و این خطها، محورهای مختصات نباشند،

آنگاه $m m' = -1$ یا $m' = \frac{-1}{m}$

عرض از مبدا و طول از مبدا خط:

هرگاه خطی محور x ها را در نقطه $(a, 0)$ و یا محور y ها را در نقطه $(0, b)$ قطع کند، a را طول از مبدا و b را عرض از مبدا خط می نامیم.



تعیین معادله یک خط:

معادله خط را با دو نوع اطلاعات می توان نوشت:

الف) شیب و یک نقطه از خط: فرض کنید شیب خط برابر m و (x_1, y_1) یک نقطه از خط باشد. معادله این خط به صورت مقابل است: $y - y_1 = m(x - x_1)$

ب) دو نقطه از خط: هرگاه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه از خط باشند، ابتدا شیب خط را به دست می آوریم، سپس به کمک m و یکی از این دو نقطه، معادله خط را مانند حالت الف می نویسیم.

فرم های دیگر برای معادله یک خط:

- معادله خط $y - y_1 = m(x - x_1)$ را می توان به فرم های زیر نیز نوشت:

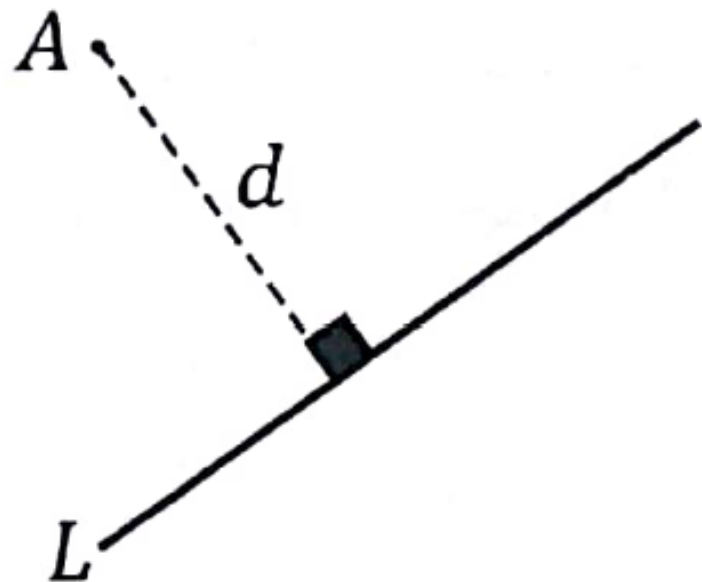
الف) $y = mx + b$ ، در این معادله m شیب خط و b عرض از مبدا می باشد.

ب) $ax + by = c$ ، در این معادله a و b هم زمان صفر نمی باشد. در صورتی

که $b \neq 0$ باشد، با تبدیل این فرم به صورت فرم الف یعنی $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$

می توان شیب خط را مشخص کرد.

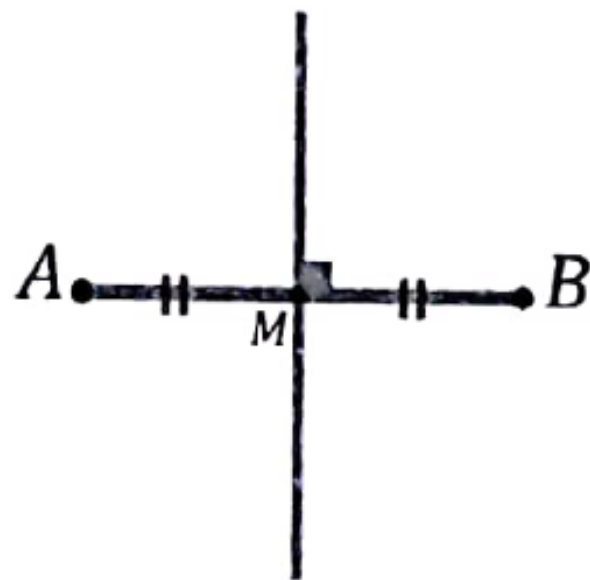
فاصله یک نقطه از خط:



برای به دست آوردن فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط L ، ابتدا معادله خط را به صورت $ax + by + c = 0$ در می آوریم، سپس از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال (۱) هرگاه $A(۵,۳)$ و $B(۳,۲)$ مختصات دو نقطه باشند، معادله عمود منصف پاره خط AB را به دست آورید.



حل: با توجه به اینکه عمود منصف، خطی می باشد که بر وسط پاره خط AB عمود است، برای حل این مثال باید مراحل زیر را طی کنیم:

الف) پیدا کردن مختصات نقطه وسط پاره خط AB $M\left(\frac{5+3}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(4, \frac{5}{2}\right)$

ب) محاسبه شیب خط AB $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-3}{3-5} = \frac{1}{2}$

ج) محاسبه شیب خط عمود بر AB $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$

د) نوشتن معادله عمود منصف (خطی که از نقطه $\left(4, \frac{5}{2}\right)$ می‌گذرد و شیب آن برابر -2 است)

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - \frac{5}{2} = -2(x - 4) \rightarrow y = -2x + \frac{21}{2}$$

مثال (۲) سه نقطه $A(1,1)$ ، $B(3,k)$ و $C(2,0)$ بر یک خط راست واقع می‌باشند، مقدار k را بیابید.

حل: سه نقطه در صورتی روی یک خط قرار دارند که: $m_{AB} = m_{AC}$

$$(m_{AB} = \frac{k-1}{2}, m_{AC} = \frac{-1}{1} = -1) \rightarrow \frac{k-1}{2} = -1 \rightarrow k = -1$$

مثال ۳) فاصله نقطه $A(1, -1)$ از خط $4x = 3y + k$ برابر ۲ است. مقدار k را بیابید.

حل:

$$4x - 3y - k = 0 \rightarrow d = \frac{|4(1) - 3(-1) - k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|7 - k|}{5} = 2$$

$$\rightarrow |7 - k| = 10 \rightarrow (7 - k = 10 \text{ یا } 7 - k = -10)$$

$$\rightarrow (k = 17 \text{ یا } k = -3)$$

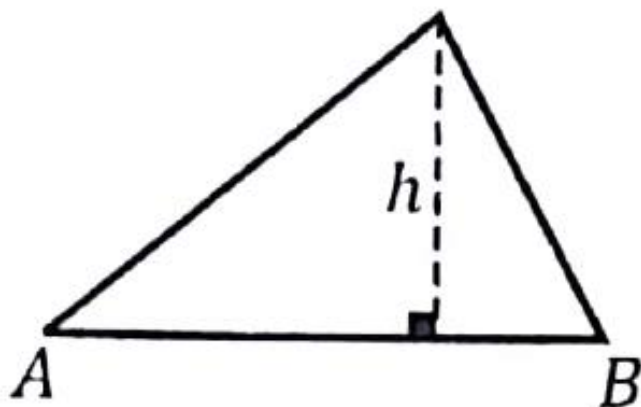
مثال ۴) مساحت یک مثلث ۱۰ واحد مربع و دو رأس آن $A(-1, 1)$ و $B(3, 4)$ می باشند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB را بیابید.

حل: با توجه به اینکه مساحت مثلث نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع می باشد، اگر قاعده را AB و ارتفاع وارد بر آن را h در نظر بگیریم، داریم:

$$AB = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 - 1)^2} = 5$$

$$s = \frac{1}{2} AB \times h = 10$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times 5h = 10 \rightarrow h = 4$$



مثال ۵) اگر $A(4, -1)$ و $C(2, 1)$ دو سر قطر یک مربع باشند، مساحت و محیط این مربع را به دست آورید.

حل: الف) طول قطر را به دست می آوریم:

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8}$$

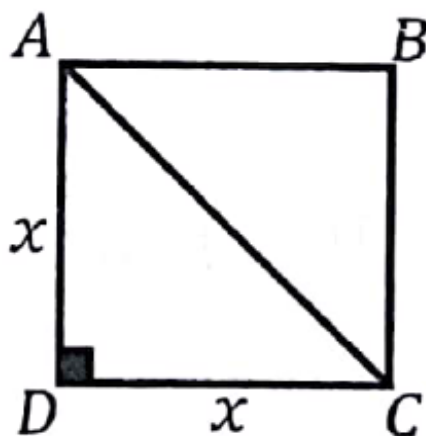
ب) ضلع مربع را x فرض می کنیم. با توجه

به شکل مقابل و رابطه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + x^2 = AC^2 \rightarrow 2x^2 = (\sqrt{8})^2 \rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x>0} x = 2$$

$$s = x^2 = 4 \quad , \quad p = 4x = 8$$

ج) محاسبه مساحت و محیط مربع:



تمرین:

۱- اگر $A(-1, 1)$ و $B(2, 0)$ مختصات دو سر یک پاره خط باشند، معادله عمود منصف پاره خط AB را بیابید.

۲- مقدار m را طوری تعیین کنید که سه خط زیر، از یک نقطه بگذرند.

$$2y = 3x + 5, \quad y = 5x - 8, \quad 3y - 4x + m = 0.$$