

ریاضی عمومی

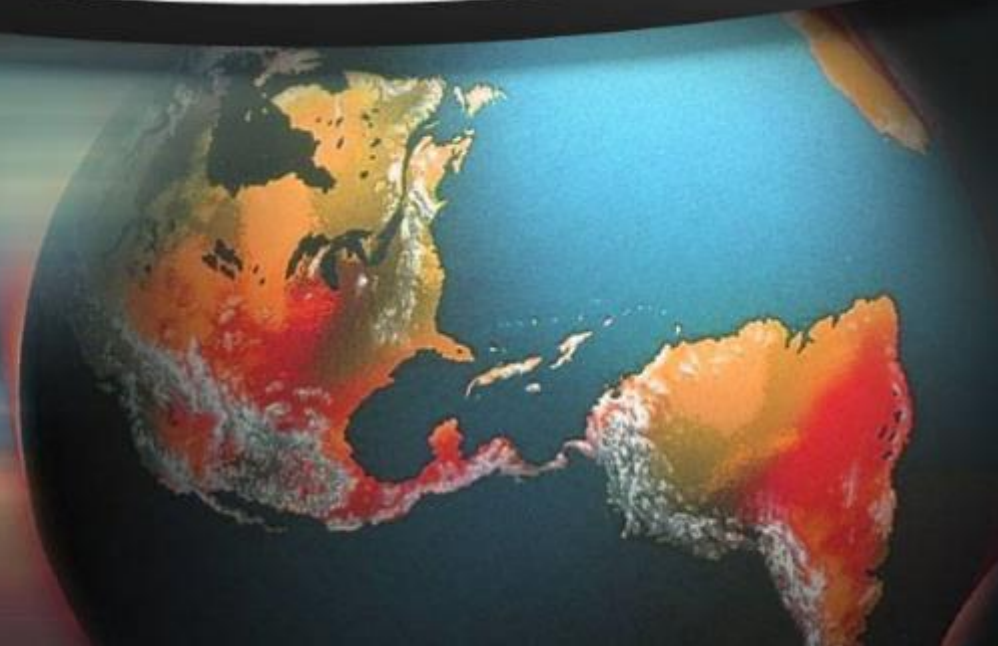
رشته هنر

مدرس و مولف جزوه:

دکتر نوشاد

منبع:

ریاضی مقدماتی، آقای گرایه چیان



فصل پنجم:

* نسبت های مثلثاتی

* روابط بین نسبت های مثلثاتی

* اتحاد مثلثاتی

جلسه یازدهم: نسبت ها و اتحادهای مثلثاتی

روابط پین نسبت های مثلثاتی

این روابط را در درس پیش آموختیم:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\tan \theta \cot \theta = 1$$

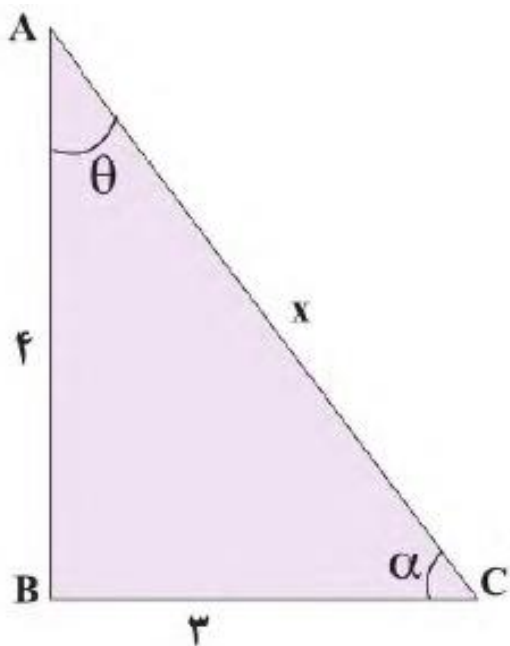
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

فعالیت:

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

الف اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.



$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ و $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ را به دست آورید.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

نتیجه:اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{الف) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\text{ب) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

تذکر : در رابطه هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه α با توجه به ناحیه ای که زاویه α در آن قرار دارد، تعیین می شود.

مثال ۱:

اگر α زاویه ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ، آنگاه مقدار $\tan \alpha$ ، $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ را به دست آورید.

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

مثال ۲:

فرض کنید α زاویه ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} \div \frac{-3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{3} = -\frac{4}{3}$$

رابطه تانژانت بر حسب کسینوس

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

روابط کتانژانت بر حسب سینوس

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

مثال ۳: اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

مثال ۴:

اگر $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ و α زاویه ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} \div \frac{-3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{3} = -\frac{4}{3}$$

اتحادهای مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$) و

$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$) را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی

می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم.

$$(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

مثال ۵:

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

حل :

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ} &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) \\ &= \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta = \text{طرف راست} \end{aligned}$$

مثال ۶:

کدام یک از تساوی های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

تساوی صحیح نیست $\Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

تساوی صحیح است $\Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{6}{16}$
 حال باید درستی آن را در حالت کلی اثبات نماییم:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

مثال ۷:

با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ در $\cot \alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید .

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\times \cot \alpha} \cot \alpha + \cot \alpha \tan^2 \alpha = \cot \alpha \times \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha + \underbrace{\cot \alpha \tan \alpha \tan \alpha}_1 = \frac{\cancel{\cos \alpha}}{\sin \alpha} \times \frac{1}{\cancel{\cos} \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}$$

مثال ۸:

با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$\text{چپ} = \frac{1}{\cancel{\sin \theta}} \times \frac{\cancel{\sin \theta}}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب})$$

$$\text{چپ} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\cancel{\cos \theta} (1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

تمرین:

۱- اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

۲- اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

۳- با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$