

ریاضی عمومی

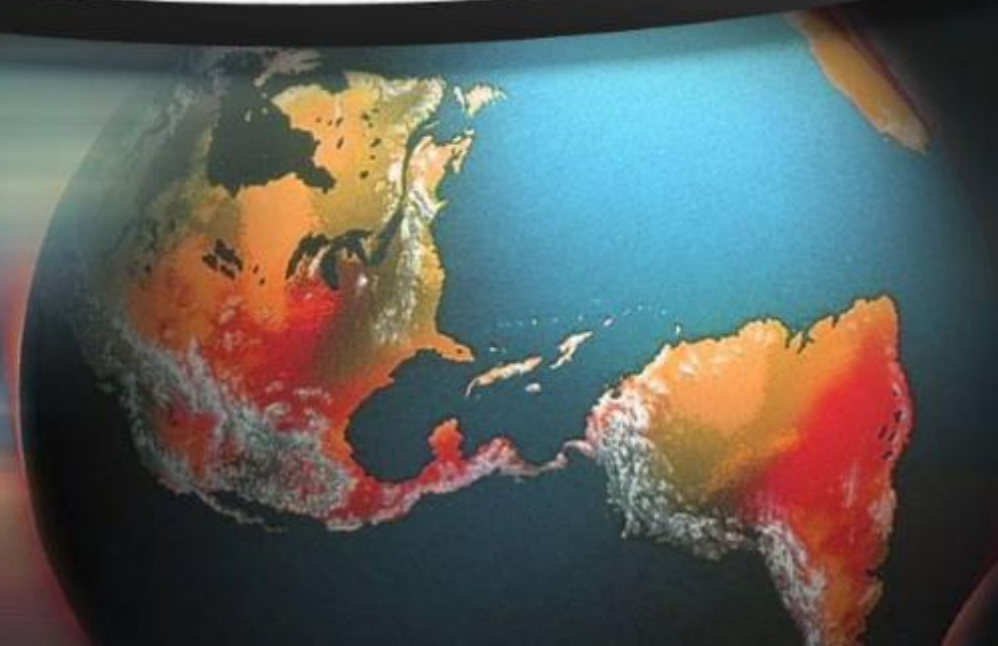
رشته هنر

مدرس و مولف جزوه:

دکتر نوشاد

منبع:

ریاضی مقدماتی، آقای گرایه چیان



فصل سوم:

* معادله

* نامعادله

* تعیین علامت عبارت جبری

* دستگاه معادلات و نامعادلات

جلسه هفتم: نامعادله و تعیین علامت عبارت جبری

نامعادله

تعریف ۱: هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از رابطه‌های زیر برقرار است:

$$a > b, a = b, a < b$$

به هر یک از رابطه‌های $a < b$ و $a > b$ ، نامساوی می‌گویند.

تعریف ۲: عبارت « $a = b$ یا $a < b$ » را با نماد $a \leq b$ نشان می‌دهیم. این رابطه را

نیز، نامساوی می‌گوییم و مشابه خواصی که برای رابطه $<$ بیان شد، برای رابطه $\leq$ نیز برقرار است.

خواص نامساوی‌ها: فرض کنید a, b, c و d اعداد حقیقی باشند، داریم:

$$۱) (a < b \text{ و } b < c) \rightarrow a < c$$

$$۲) a < b \rightarrow (a + c < b + c \text{ و } a - c < b - c)$$

$$۳) (a < b \text{ و } ۰ < c) \rightarrow (ac < bc \text{ و } \frac{a}{c} < \frac{b}{c})$$

$$۴) (a < b \text{ و } c < ۰) \rightarrow (ac > bc \text{ و } \frac{a}{c} > \frac{b}{c})$$

$$۵) (a < b \text{ و } c < d) \rightarrow (a + c < b + d)$$

$$۶) (۰ < c < d \text{ و } ۰ < a < b) \rightarrow ac < bd$$

$$۷) (۰ < a < b \text{ و } n \in \mathbb{N}) \rightarrow a^n < b^n$$

تعریف ۳: یک نامساوی که شامل یک یا چند متغیر (حرف) باشد و این نامساوی، به ازای بعضی مقادیر که به جای متغیرهای آن قرار می‌گیرد درست، و به ازای بعضی مقادیر دیگر نادرست باشد، نامعادله می‌نامند. نامعادله‌ها را برحسب تعداد متغیرها و نوع عبارت موجود در آن نام‌گذاری می‌کنند.

نامساوی‌های زیر نامعادله می‌باشند.

$$۱) ۲x - ۳ > ۵$$

$$۲) ۱) x^2 + ۲x > ۳$$

$$۳) \frac{1}{x} \geq \frac{1+x}{x-1}$$

$$۴) \sqrt{x+2} \leq x$$

تعریف ۴: به مجموعه مقادیری که اگر به جای متغیرهای نامعادله قرار دهیم یک نامساوی درست حاصل شود، مجموعه جواب نامعادله می‌گویند، و منظور از حل نامعادله به دست آوردن مجموعه جواب می‌باشد. این مجموعه را معمولاً با M نمایش می‌دهیم.

حل نامعادله درجه اول

هر نامعادله به صورت $ax + b > 0$ را یک نامعادله یک مجهولی درجه اول می‌نامند. روش حل این نوع نامعادلات به کمک خواص نامساوی‌ها به صورت زیر است:

$$ax + b > 0 \rightarrow ax > -b \xrightarrow{a>0} x > \frac{-b}{a}$$
$$ax + b > 0 \rightarrow ax > -b \xrightarrow{a<0} x < \frac{-b}{a}$$

مثال ۵: نامعادله مقابل را حل کنید. $3(x - 2) + 2(3 - 2x) < \frac{1}{3}(x - 3)$

حل: $3x - 6 + 6 - 4x < \frac{1}{3}x - 1 \rightarrow 1 < \frac{4}{3}x \rightarrow \frac{3}{4} < x$

مثال ۶: نامعادله مقابل را حل کنید. $(x - 2)^2 < (3 - x)^2 + 2x - 3$

حل: $x^2 - 4x + 4 < 9 - 6x + x^2 + 2x - 3$

$\rightarrow -4x + 4x < 9 - 3 - 4 \rightarrow 0 < 2$

تعیین علامت یک عبارت جبری

هرگاه مشخص کنیم یک عبارت جبری، در چه نقاط یا فاصله‌هایی مثبت، منفی و یا صفر می‌باشد، این عمل را تعیین علامت عبارت جبری می‌نامند. با ذکر چند مثال و نتیجه، با این مطلب آشنا می‌شویم.

نکته: جدول تعیین علامت عبارت $P = ax + b$ به صورت زیر است:

$$ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
P	مخالف علامت a	♦	موافق علامت a

مثال ۷: می خواهیم عبارت $P = 2x - 4$ را تعیین علامت کنیم. برای عبارت P سه حالت ممکن است:

$$P > 0 \rightarrow 2x - 4 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$P = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$P < 0 \rightarrow 2x - 4 < 0 \rightarrow x < 2$$

این سه حالت را به صورت زیر نمایش می دهیم و به آن جدول تعیین علامت عبارت P می گوییم.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
P	$-$	$\bullet$	$+$

مثال ۸: برای تعیین علامت عبارت $P = x^2 - 3x - 4$ ، ابتدا عبارت P را به حاصل

ضرب دو عبارت درجه اول P_1 و P_2 تجزیه کرده، سپس جدول تعیین علامت P_1 و P_2 را به طور مشترک رسم می کنیم. به کمک این جدول، عبارت P تعیین علامت می شود.

$$P = x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$$

$$P_1 = x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 , \quad P_2 = x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
P_1	$-$	$\bullet$	$+$	$+$
P_2	$-$		$\bullet$	$+$
P	$+$	$\bullet$	$\bullet$	$+$

مثال ۹: عبارت $P = x^2 - 4x + 4$ را تعیین علامت کنید.

$$P = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

حل:

$$P_1 = P_2 = x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
P_1	-	•	+
P_2	-	•	+
P	+	•	+

مثال ۱۰: عبارت $P = -x^2 - 4$ را تعیین علامت کنید.

حل: معادله ریشه حقیقی ندارد $\rightarrow x^2 = -4 \rightarrow P = -x^2 - 4 = 0$

بنابراین عبارت $P = -x^2 - 4 = -(x^2 + 4)$ به ازای هر عدد حقیقی، منفی می باشد.

لذا جدول تعیین علامت آن به صورت مقابل است:

x	$-\infty$	$+\infty$
P		-

توجه: با مشاهده سه مثال قبل، پذیرش نتیجه زیر، به راحتی امکان پذیر خواهد بود.

نتیجه: برای تعیین علامت عبارت $P = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ابتدا معادله درجه دوم $P = 0$ را حل می کنیم. پس از تشکیل Δ برای حل، با سه حالت مواجه می شویم.

حالت اول ($\Delta > 0$): در این حالت معادله $P = 0$ دارای دو ریشه متمایز x_1 و x_2 می باشد و عبارت P را می توان به صورت $P = a(x - x_1)(x - x_2)$ تجزیه کرد با فرض $x_1 < x_2$ علامت P به صورت زیر است.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
P	موافق علامت a	•	مخالف علامت a	•	موافق علامت a

حالت دوم ($\Delta = 0$): در این حالت معادله $P = 0$ دارای ریشه مضاعف x_1 می باشد و عبارت P را می توان به صورت $P = a(x - x_1)^2$ تجزیه کرد و علامت P به صورت

زیر است:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
P	موافق علامت a	♦	موافق علامت a

حالت سوم ($\Delta < 0$): در این حالت معادله $P = 0$ جواب ندارد و عبارت P به ازای کلیه مقادیر همواره مثبت یا منفی است. در این حالت، علامت P همان علامت a است.

x	$-\infty$	$+\infty$
P	موافق علامت a	

مثال ۱۱: در زیر چند عبارات درجه دو، تعیین علامت شده است.

۱) $P = 2x^2 - 5x + 3$

$P = 2x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, \frac{3}{2}$

حل:

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
P	$+$	$-$	$+$	

۲) $P = -x^2 + 2x - 1 \rightarrow P = -(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$ (ریشه مضاعف)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
P	$-$	$-$	

$$۳) P = 3x^2 - x + 4$$

معادله جواب ندارد $\rightarrow \Delta = -11 < 0 \rightarrow P = 3x^2 - x + 4 = 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
P		+

مثال ۱۲: عبارت $P = \frac{x-2}{3x+6}$ را تعیین علامت کنید.

حل: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$, $3x + 6 = 0 \rightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	+	+
$3x+6$	-	+	+	+
P	+	-	+	+

مثال ۱۳: نامعادله $x^2 - 5x > 6$ را حل کنید.

$$x^2 - 5x - 6 > 0 \rightarrow P = x^2 - 5x - 6$$

حل:

$$P = 0 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6) = 0 \rightarrow x = -1, 6$$

x	$-\infty$	-1	6	$+\infty$	
P	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
$P > 0$	جواب				جواب

$$M = \{x | x < -1 \text{ یا } 6 < x\} = (-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$$

مثال ۱۴: نامعادله $1 \leq \frac{1}{x}$ را حل کنید.

حل:

$$1 \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0 \leq \frac{1}{x} - 1 \rightarrow 0 \leq \frac{1-x}{x} \rightarrow P = \frac{1-x}{x}$$

$$1-x=0 \rightarrow x=1, \quad x=0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	-	
x	-	+	+	
P	-	+	-	
$P \geq 0$	خواب	جواب	خواب	

$$M = (0, 1]$$

دانشکده فنی و حرفه ای دختران شیراز

فصل ۳، بخش ۲ - نوشاد

مثال ۱۵: نامعادله $\frac{2}{x-1} < \frac{1}{x}$ را حل کنید.

حل: $\frac{2}{x-1} < \frac{1}{x} \rightarrow \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} < 0 \rightarrow P = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x(x-1)}$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$, $x(x-1)=0 \rightarrow x=0, 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x(x-1)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
P	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$P < 0$	جواب		جواب		

$$M = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

مثال ۱۶: دامنه عبارت $A = \sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$ را مشخص کنید.

حل: چون فرجه رادیکال زوج است، بنابراین باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، یعنی: $\frac{3-x}{x+1} \geq 0$ ، لذا مجموعه جواب این نامعادله، همان دامنه عبارت A است. فرض کنیم: $P = \frac{3-x}{x+1}$

$$3-x=0 \rightarrow x=3, \quad x+1=0 \rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$3-x$	+	+	•	-
$x+1$	-	•	+	+
P	-	•	+	-
$P \geq 0$	دامنه عبارت A مجموعه $[-1, 3]$ می باشد.		جواب	

تذکر: هرگاه P یک عبارت جبری و n عدد طبیعی فرد غیر یک باشد، دامنه عبارت $A = \sqrt[n]{P}$ و P یکسان می باشد.

مثال ۱۷: دامنه عبارت $A = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2+5x-6}}$ را مشخص کنید.

حل: چون فرجه رادیکال فرد است، پس دامنه A و دامنه $P = \frac{x-2}{x^2+5x-6}$ برابر است.

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow (x + 6)(x - 1) = 0 \rightarrow (x = -6 \text{ یا } x = 1)$$

$$\rightarrow D = \mathbb{R} - \{-6, 1\}$$

تمرین

۱- عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $(2 - 3x)(1 - x)$

۲) $9x^2 - 6x + 1$

۳) $-x^2 + 2x - 7$

۴) $x^2 + 5x - 6$

۵)
$$\frac{5-x}{(2+x)(1-x)}$$

۶)
$$\frac{2x^2+3}{x^2+1}$$

۲- نامعادلات زیر را حل کنید.

۷) $(x - 1)^2 - (x + 3)^2 > 5$

۸) $\frac{x^2 - x}{x} < 1$

۹) $x^2 \geq 3x - 4$

۱۰) $\frac{x-2}{x-4} < \frac{x+1}{x+3}$

۳- دامنه عبارات زیر را مشخص کنید.

۱۲) $\sqrt[5]{1 - \frac{1}{x+2}}$

۱۱) $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$

مقدار m را چنان تعیین کنید که:

۳) معادله $mx^2 + 3x + 1 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد.

۴) معادله $2x^2 + mx + 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.

۵) معادله $x^2 + (m - 2)x + (m + 1) = 0$ ریشه حقیقی داشته باشد.

۶) معادله $x^2 + (m - 2)x + (m + 1) = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.