

ریاضی عمومی

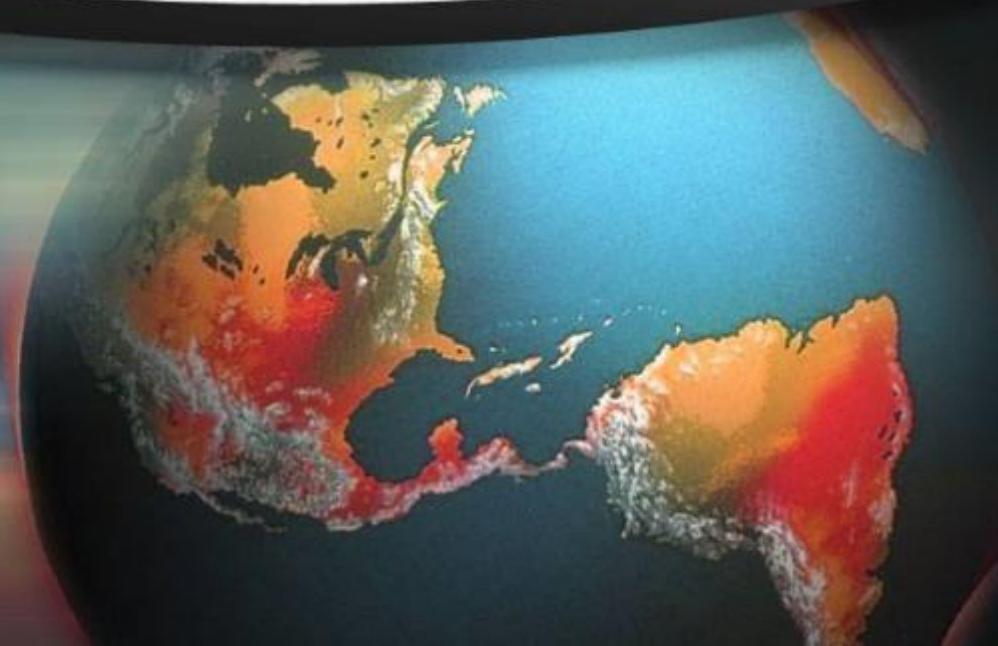
رشته هنر

مدرس و مولف جزوه:

دکتر نوشاد

منبع:

ریاضی مقدماتی، آقای گرایه چیان



فصل سوم:

* معادله

* نامعادله

* تعیین علامت عبارت جبری

* دستگاه معادلات و نامعادلات

جلسه ششم: حل معادله و نامعادله

معادله یک مجهولی درجه اول

معادله یک مجهولی عبارت است از یک تساوی بر حسب یک متغیر مانند «X» که به ازای بعضی مقادیر «X» تساوی درست می شود. این مقادیر را جواب های معادله می گوئیم. منظور از حل معادله، به دست آوردن مقدار مجهول یعنی مجموعه جواب معادله است. برای حل معادله درجه اول یک مجهولی به طریق

زیر عمل می کنیم:

۱. ابتدا کسرها را حذف می کنیم و معادله را به ساده ترین صورت می نویسیم.
۲. مجهول ها را یک طرف و مقادیر معلوم را در طرف دیگر تساوی قرار می دهیم تا معادله را به صورت کلی $ax = b$ در آوریم.
۳. اگر $a \neq 0$ باشد معادله جواب دارد که جواب آن $x = \frac{b}{a}$ است.

$$۱) ۳x + ۲ = ۱۴$$

$$۳x = ۱۴ - ۲$$

$$۳x = ۱۲$$

$$x = \frac{۱۲}{۳} \Rightarrow x = ۴$$

$$۲) ۷x + ۱ = ۲x - ۵$$

$$۷x - ۲x = -۵ - ۱$$

$$۵x = -۶$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۶}{۵}$$

$$۳) \frac{x-1}{3} + \frac{2x+1}{2} = \frac{2}{3}$$

دو طرف را در ۶ ضرب می کنیم

$$2(x-1) + 3(2x+1) = 4$$

$$2x - 2 + 6x + 3 = 4$$

$$8x + 1 = 4$$

$$8x = 4 - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{8}$$



دانشکده فنی و حرفه ای دختران شیراز

فصل ۳ ، بخش ۱-۱ - نوشتاد

یکی از روش‌های حل مسایل به کمک معادله، انتخاب متغیر مجهول برای مسئله و سپس تشکیل معادله و حل آن است.

مثال

عددی به دست آورید که اگر از دو برابر آن ۳ واحد کم شود حاصل ۱۷ شود.

راه حل)

عدد مورد نظر را x بگیریم.

$$2x - 3 = 17$$

$$2x = 17 + 3 \quad \Rightarrow \quad 2x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20}{2} = 10$$

روش های حل معادله ی درجه دوم

هر معادله ی درجه دوم به صورت کلی $ax^2 + bx + c = 0$ نوشته می شود که در آن $a \neq 0$ است.

۱. روش تجزیه

در این روش معادله هایی را که می توان به حاصل ضرب دو عامل تبدیل کرد، تجزیه می کنیم، و با توجه به اینکه می دانیم اگر $A \times B = 0$ آنگاه $A = 0$ یا $B = 0$. هر یک از عامل های آن را مساوی صفر قرار می دهیم و دو معادله درجه یک حاصل را حل می کنیم.

مثال  معادله‌های زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 7x + 6 = 0$$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک عبارت فوق به صورت $(x - 6)(x - 1) = 0$

تجزیه می‌شود و نتیجه می‌گیریم:

$$x - 6 = 0 \text{ یا } x - 1 = 0$$

پس جواب‌های معادله $x = 1$ و $x = 6$ است.

$$\text{ب) } x^2 - 9 = 0$$

این معادله را به صورت $(x - 3)(x + 3) = 0$ می‌نویسیم که جواب‌های آن $x = 3$

$$\text{و } x = -3.$$

هر معادله ی درجه دوم به صورت کلی $ax^2 + bx + c = 0$ نوشته می شود که در آن $a \neq 0$ است.

الف) اگر $c = 0$ باشد معادله را به روش تجزیه حل می کنیم.

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 = 0$$

که نتیجه می شود

مثال $3x^2 + 7x = 0$

در این معادله از x فاکتور می گیریم می شود: $x(3x + 7) = 0$ که نتیجه می شود:

$$x = \frac{-7}{3} \text{ و } x = 0$$

ب) اگر $b = 0$ باشد معادله را به روش تبدیل به مربع کامل حل می کنیم. منظور ریشه گیری است.

مثال ۱  برای معادله $x^2 = 4$ می نویسیم $x^2 = (\pm 2)^2$ که نتیجه می شود $x = 2$ و $x = -2$.

مثال ۲  برای حل معادله $x^2 - 3 = 0$ می نویسیم:

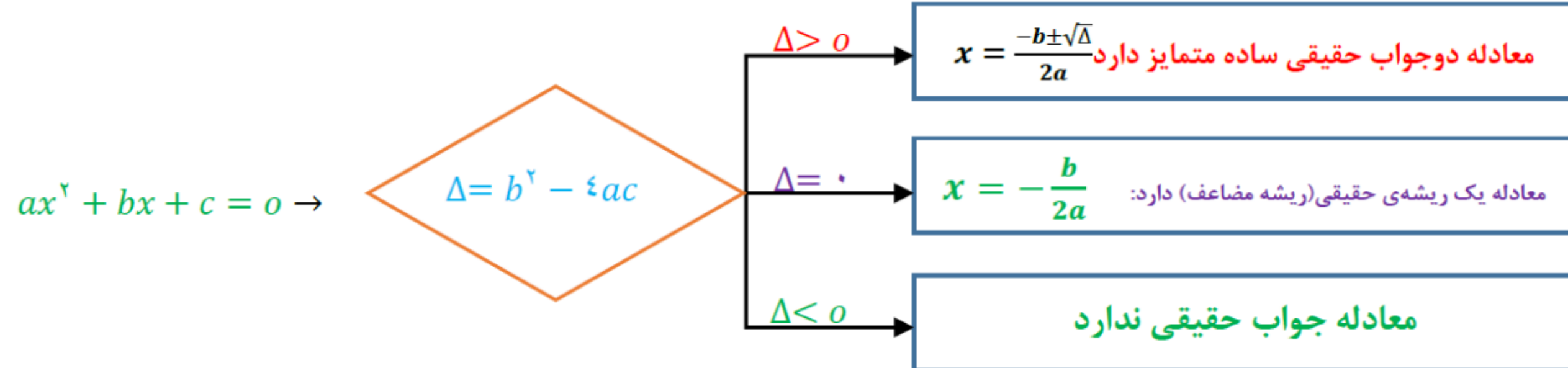
$x^2 = 3$ یا $x^2 = (\pm \sqrt{3})^2$ که نتیجه می شود $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$

مثال ۳  برای حل معادله $(x-1)^2 = 2$ می توان نوشت $(x-1)^2 = (\pm \sqrt{2})^2$ که نتیجه می شود

$x-1 = \sqrt{2}$ و $x-1 = -\sqrt{2}$ و خواهیم داشت $x = 1 + \sqrt{2}$ و $x = 1 - \sqrt{2}$.

حل معادله ی درجه ی دوم به روش فرمول کلی

ابتدا دلتا را به دست می آوریم و با توجه به علامت دلتا تعداد جواب ها و جواب ها را به دست می آوریم



$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

۲. روش کلی حل معادله ی درجه دوم

در حالت کلی می توان ابتدا $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه کرد:

۱. اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو جواب حقیقی متمایز دارد:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال ۱  معادله $3x^2 - 7x + 4 = 0$ را حل کنید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(4) = 1$$

که $\Delta = 1$ می شود پس $x_2 = \frac{7-1}{6} = 1, x_1 = \frac{7+1}{6} = \frac{4}{3}$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲. اگر $\Delta = 0$ دو جواب معادله با هم برابر می شوند که گفته می شود معادله

$$\text{ریشه مضاعف دارد و: } x_1, x_2 = \frac{-b}{2a}$$

مثال ۲  معادله $x^2 - 2x + 1 = 0$ را حل کنید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0 \text{ داریم:}$$

$$\text{پس معادله ریشه مضاعف } 1 = \frac{2}{2} = \frac{-b}{2a} = x_1 = x_2 \text{ دارد.}$$

۳. اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال ۳  برای حل معادله $x^2 + 2x + 5 = 0$ داریم: $a = 1$ و $b = 2$ و $c = 5$ پس
 $\Delta = (2)^2 - 4(1)(5) = -16$ یعنی $\Delta < 0$ چون $\Delta < 0$ معادله جواب حقیقی ندارد.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

مثال: هریک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

$$۱) \quad 4x^2 - 13x + 3 = 0 \quad \xrightarrow{\Delta = 169 - 48 = 121} \quad x = \frac{13 \pm 11}{8} \rightarrow x = 3, x = \frac{1}{4}$$

$$۲) \quad r - r^2 = 3 \rightarrow r^2 - r + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11 \rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد}$$

$$۳) \quad a^2 + 2\sqrt{3}a = 9 \rightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta = 48} a = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$۴) \quad \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{x6} 2t^2 - 3t - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta = 81} t = \frac{3 \pm 9}{4} \rightarrow t = 3, t = \frac{-3}{2}$$

مثال ۹: معادلات زیر را می توان به چند معادله درجه اول تبدیل و سپس حل کرد.

$$۱) x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0 \rightarrow x(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$\rightarrow (x = 0 \text{ یا } x - 3 = 0 \text{ یا } x + 3 = 0) \rightarrow (x = 0 \text{ یا } x = 3 \text{ یا } x = -3)$$

$$۲) x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0 \rightarrow (x - 3 = 0 \text{ یا } x - 2 = 0) \rightarrow (x = 3 \text{ یا } x = 2)$$

$$۳) (x - ۲)^۲ - (۲x + ۱)^۲ = .$$

$$[(x - ۲) - (۲x + ۱)][(x - ۲) + (۲x + ۱)] = .$$

$$(-x - 3)(3x - 1) = 0$$

مثال ۱۳: عبارت $P = ۲x^۲ - ۳x - ۲$ را تجزیه کنید.

$$۲x^۲ - ۳x - ۲ = ۰ \rightarrow (x = -\frac{1}{۲} \text{ یا } x = ۲)$$

$$۲x^۲ - ۳x - ۲ = ۲(x + \frac{1}{۲})(x - ۲) = (۲x + ۱)(x - ۲)$$

مثال ۱۴: عبارت $P = 4x^2 - 4x + 1$ را تجزیه کنید.

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (\text{ریشه مضاعف})$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (2x - 1)(2x - 1) = (2x - 1)^2$$

مثال ۱۵: عبارت $P = x^2 - 4x + 7$ را تجزیه کنید.

حل: چون در معادله $x^2 - 4x + 7 = 0$ داریم: $\Delta = -12 < 0$ ، بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد و لذا عبارت P را نمی توان تجزیه کرد.

مقدار m را طوری به دست آورید که معادله $x^2 + (2m-1)x + m^2 = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد.

در این معادله $c = m^2$ و $b = 2m - 1$ و $a = 1$ است، پس:

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(1)(m^2)$$

$$\Delta = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 = -4m + 1$$

می دانیم وقتی معادله ریشه مضاعف دارد که $\Delta = 0$ باشد، پس $-4m + 1 = 0$ که

در نتیجه می شود $m = \frac{1}{4}$ خواهد بود.

حل چند مسأله به کمک معادلات درجه دوم

مثال: طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر

مربع باشد. ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$$s = a(4a + 3) = 45$$

$$\rightarrow 4a^2 + 3a - 45 = 0$$

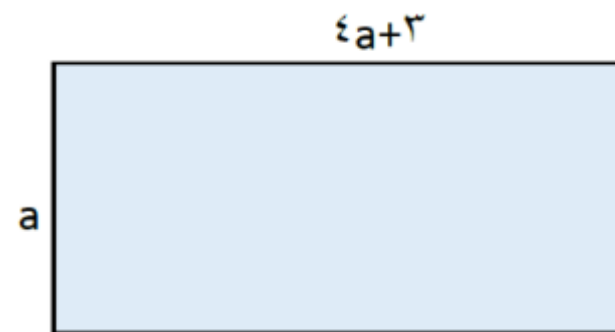
$$\Delta = 729$$



$$a = \frac{-3 \pm 27}{8}$$

$$a = -\frac{15}{4} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$a = 3 \rightarrow \text{عرض مستطیل ۳ و طول آن ۱۵ است}$$



مثال: اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{سن برادر کوچک} = x \xrightarrow{\text{چهار سال بعد}} x + 4 \\ \text{سن برادر بزرگ} = x + 4 \xrightarrow{\text{چهار سال بعد}} x + 8 \end{array} \right\} \rightarrow (x + 4)(x + 8) = 60 \rightarrow x^2 + 12x + 32 = 60$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 14) = 0$$

غیر قابل قبول چون سن منفی نداریم $x = -14$
 $\rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -14 \\ x = 2 \end{array} \right. \rightarrow$ برادر کوچک ۲ ساله و برادر بزرگ ۶ ساله‌اند

بخش ۳-۱ : معادله عبارت گویا

عبارت‌های کسری را که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند عبارت‌های گویا می‌نامند. برای حل معادلات شامل عبارت‌های گویا با ضرب طرفین معادله در ک.م.م مخرج کسرها معادله حاصل را ساده‌تر و حل می‌نماییم. جواب‌های به دست آمده در صورتی قابل قبول‌اند، که مخرج کسرها را صفر نکنند.

 مثال - معادله‌ی $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$ را حل کنید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها $x^2 - 4$ است، با ضرب این عبارت در طرفین معادله خواهیم داشت:

$$(x+2)^2 - (x-2)^2 = 8 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4) = 8x = 8 \Rightarrow x = 1$$

قابل قبول $x = 1$

مثال - به ازای چه مقدار k معادله $\frac{3}{x+8} + \frac{x+5}{k+1} = \frac{-5x+4}{15}$ دارای مجموعه جواب $\{-3\}$ است؟

حل: چون $x = -3$ ریشه‌ی معادله است باید در معادله صدق کند.

پس به جای x عدد -3 قرار می‌دهیم و k را می‌یابیم.

$$\frac{3}{-3+8} + \frac{-3+5}{k+1} = \frac{-5(-3)+4}{15} \Rightarrow \frac{3}{5} + \frac{2}{k+1} = \frac{19}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k+1} = \frac{19}{15} - \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2}{k+1} = \frac{10}{15} \Rightarrow 10(k+1) = 30 \Rightarrow (k+1) = 3 \Rightarrow k = 2$$

بخش ۱-۳ : معادلات رادیکالی

مثال ۱۸: معادله رادیکالی $x = \sqrt{x+6}$ را حل کنید.

دو طرف این معادله را به توان دو می‌رسانیم، داریم: $x^2 = x + 6$

$$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \rightarrow (x = 3 \text{ یا } x = -2)$$

از دو جواب اخیر، فقط عدد ۳ در معادله صدق می‌کند. پس داریم: $M = \{3\}$

مثال ۱۹: معادله رادیکالی $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^4 - 1}$ را حل کنید.

دو طرف این معادله را به توان دو می‌رسانیم، داریم: $x^2 - 1 = x^4 - 1$

$$x^2 = x^4 \rightarrow x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(1 - x^2) = 0 \rightarrow (x = 0, 1, -1)$$

از سه جواب اخیر، فقط عدد ۱ و -۱ در معادله صدق می‌کنند. پس داریم: $M = \{-1, 1\}$



دانشکده فنی و حرفه ای دختران شیراز

تمرین

جواب معادلات زیر را به دست آورید.

فصل ۳ ، بخش ۳ - نوشاد