

ریاضی عمومی

رشته هنر

مدرس و مولف جزوه:

دکتر نوشاد

منبع:

ریاضی مقدماتی، آقای گرایه چیان



فصل چهارم:

* لگاریتم و خواص آن

* معادلات و نامعادلات لگاریتمی

جلسه نهم: لگاریتم و خواص آن

لگاریتم

مقدمه: عبارت $2^5 = 32$ را در نظر بگیرید. حال اگر این سوال مطرح شود که دو به دو چه عددی برابر ۳۲ است، پاسخ عدد ۵ می باشد. این مطلب را با نماد $\log_2 32 = 5$ نمایش داده و می خوانیم: « لگاریتم عدد ۳۲ در مبنای ۲ برابر ۵ است ». لگاریتم ارتباط مستقیمی با مفهوم توان دارد. محاسبات زیر این مطلب را بیشتر توضیح می دهد:

$$\log_4 64 = x \rightarrow 4^x = 64 \rightarrow 4^x = 4^3 \rightarrow x = 3$$

$$\log_{10} 0.01 = x \rightarrow 10^x = 0.01 \rightarrow 10^x = 10^{-2} \rightarrow x = -2$$

$$\log_4 \sqrt{2} = x \rightarrow 4^x = \sqrt{2} \rightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

* تعریف ۱: هرگاه b یک عدد حقیقی مثبت غیر یک و x یک عدد حقیقی، و داشته باشیم: $a = b^x$ ، در این صورت x را لگاریتم عدد a در مبنای b می گویند و با نماد

$$Log_b a \text{ نشان می دهند. به عبارت دیگر داریم: } b^x = a \iff Log_b a = x$$

* نتیجه: با توجه به تعریف فوق، برای عدد حقیقی مثبت و غیر یک b ، و عدد حقیقی دلخواه x ، عبارت $a = b^x$ همواره مثبت است. بنابراین در عبارت $x = Log_b a$ ، مقدار a همواره مثبت است. لذا لگاریتم، فقط برای اعداد مثبت تعریف می شود.

* تعریف ۲: لگاریتم در مبنای عدد ۱۰ را لگاریتم اعشاری می نامند و به جای $Log_{10} a$ از نماد $Log a$ استفاده می کنند؛ و لگاریتم در مبنای عدد $e^{(1)}$ را لگاریتم طبیعی می نامند و به جای $Log_e a$ از نماد $Ln a$ استفاده می کنند.

خواص لگاریتم

$$۱) \log_b b = ۱$$

$$۲) \log_b ۱ = ۰$$

$$۳) \log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

$$۴) \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$۵) \log_b x^n = n \log_b x \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$۶) \log_b^m x = \frac{1}{m} \log_b x \quad (m \neq ۰)$$

$$۷) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (c \neq ۱, c > ۰)$$

$$۸) b^{\log_b a} = a$$

$$۹) e^{\ln x} = x$$

$$۱۰) e^{x \ln a} = a^x$$

مثال ۱

به کمک خواص لگاریتم مقدار عبارات زیر محاسبه شده است.

$$۱) \log_3 \sqrt[4]{81} = \log_3 3^{\frac{4}{2}} = \frac{4}{2} \log_3 3 = \frac{4}{2} \times 1 = \frac{4}{2}$$

$$۲) \log_{81} 3 = \log_{3^4} 3 = \frac{1}{4} \log_3 3 = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$۳) \log_9 \sqrt[4]{27} = \log_{3^2} 3^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log_3 3 = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

$$۴) \log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = \frac{-3}{1} \log_{10} 10 = \frac{-3}{1} \times 1 = -3$$

مثال ۲ با فرض اینکه مقدار $\log 2$ و $\log 3$ به ترتیب a و b باشد، مقدار عبارات محاسبه شده است.

$$\begin{aligned} 1) \log 24 &= \log(2^3 \times 3) = \log 2^3 + \log 3 \\ &= 3 \log 2 + \log 3 = 3a + b \end{aligned}$$

$$2) \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$$

$$\begin{aligned} 3) \log \frac{2\sqrt{3}}{25} &= \log 2\sqrt{3} - \log 25 = \log 2 + \log \sqrt{3} - \log 5^2 \\ &= \log 2 + \log 3^{\frac{1}{2}} - 2 \log 5 = a + \frac{1}{2} \log 3 - 2(1 - a) \\ &= a + \frac{1}{2} b - 2(1 - a) = 3a + \frac{1}{2} b - 2 \end{aligned}$$

مثال ۳ عبارات زیر به کمک خواص لگاریتم، به ساده ترین صورت ممکن، نوشته شده است.

$$۱) ۴ \log_2 8 = 4^3 = 64$$

$$۲) ۲^2 \log_2 5 = 2 \log_2 5^2 = 2 \log_2 25 = 25$$

$$۳) 2 \log_2 5 + \log_2 3 = 2 \log_2 (5 \times 3) = 2 \log_2 15 = 15$$

$$۴) 5 \log_4 8 - \log_4 2 = 5 \log_4 \frac{8}{2} = 5 \log_4 4 = 5^1 = 5$$

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات و نامعادلات لگاریتمی، از خاصیت‌های زیر استفاده می‌کنیم^(۱):

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y$$

$$\log_a x < \log_a y \iff x < y \quad (1 < a)$$

$$\log_a x < \log_a y \iff x > y \quad (0 < a < 1)$$

الف) جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که در دامنه معادله یا نامعادله لگاریتمی قرار دارد.

ب) جواب‌های به‌دست آمده را در معادله یا نامعادله لگاریتمی قرار می‌دهیم، اگر

صدق کرد، قابل قبول می‌باشد.

مثال ۴ معادله $Log_5 x = Log_5 4$ حل کنید.

حل: دامنه این معادله اعداد حقیقی مثبت می باشد.

$$Log_5 x = Log_5 4 \rightarrow x = 4$$

از دو جواب به دست آمده، با توجه به دامنه فقط $x = 4$ قابل قبول است.

مثال ۵ معادله $Log_3 x^2 = Log_3 16$ حل کنید.

حل: دامنه این معادله اعداد حقیقی غیر صفر می باشد.

$$Log_3 x^2 = Log_3 16 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

با توجه به دامنه هر دو جواب به دست آمده، قابل قبول است.

مثال ۶ معادله مقابل را حل کنید. $\log_3(x - 4) - \log_3(x + 1) = 2$

حل: ابتدا دامنه معادله را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x - 4 > 0 \rightarrow x > 4 \\ x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \end{cases} \rightarrow D = (4, +\infty)$$

بنابر خواص لگاریتم داریم:

$$\log_3(x - 4) - \log_3(x + 1) = 2 \rightarrow \log_3 \frac{x-4}{x+1} = 2$$

$$\rightarrow \frac{x-4}{x+1} = 3^2 \rightarrow x - 4 = 9x + 9 \rightarrow 8x = -13 \rightarrow x = \frac{-13}{8}$$

چون $\frac{-13}{8} \notin D$ پس این جواب قابل قبول نمی باشد و لذا معادله جواب ندارد.

مثال ۷ معادله مقابل را حل کنید. $\log(x^2 - 26) = 1 + \log(x - 5)$

حل: ابتدا معادله را حل کرده، سپس به بررسی جواب‌ها می‌پردازیم. بنابر خواص لگاریتم داریم:

$$\log(x^2 - 26) = 1 + \log(x - 5)$$

$$\rightarrow \log(x^2 - 26) = \log 10 + \log(x - 5)$$

$$\rightarrow \log(x^2 - 26) = \log 10(x - 5)$$

$$\rightarrow x^2 - 26 = 10x - 50 \rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$\rightarrow (x - 6)(x - 4) = 0 \rightarrow (x = 6 \text{ یا } x = 4)$$

با قرار دادن جواب‌ها در معادله اصلی، مشاهده خواهیم کرد که فقط $x = 6$ قابل قبول است.

نامعادلات لگاریتمی

مثال ۸ نامعادله مقابل را حل کنید. $1 < \log_2 x$

حل: دامنه این نامعادله اعداد حقیقی مثبت می باشد، از طرفی چون مبنا بزرگتر از یک است، داریم:

$$1 < \log_2 x \rightarrow \log_2 2 < \log_2 x \rightarrow 2 < x$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله، مجموعه جواب دستگاه نامعادله زیر است:

$$\begin{cases} 0 < x \\ 2 < x \end{cases} \rightarrow 2 < x \rightarrow M = (2, +\infty)$$

مثال ۹ نامعادله مقابل را حل کنید. $1 < \log_{1/5} x$

حل: دامنه این نامعادله اعداد حقیقی مثبت می باشد، از طرفی چون مبنا بین صفر و یک است، داریم:

$$1 < \log_{1/5} x \rightarrow \log_{1/5} 0.5 < \log_{1/5} x \rightarrow 0.5 > x$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله، مجموعه جواب دستگاه نامعادله زیر است:

$$\begin{cases} 0 < x \\ x < 0.5 \end{cases} \rightarrow 0 < x < 0.5 \rightarrow M = (0, \frac{1}{2})$$

تمرین

(A) مقدار عددی عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \log_4 16 + \log_3 27 - \log_5 25$$

$$۲) 3\log_5 \sqrt{5} - 2\log 0.01 - 4\log_{\sqrt{2}} \sqrt{32}$$

$$۳) \log_4 32 - 2\log_9 27 + 5\log_{125} 25$$

$$۴) 3^2 \log_3 5 - \log_3 2 + 5^3 \log_5 2 + \log_5 4$$

$$۵) 4\log_2 5 - 25\log_5 2 + \log_{10} 10^5$$

(B) فرض $\log 2 = a$ ، $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ ، مقادیر زیر را بر حسب a ، b و c محاسبه کنید.

۱) $\log \sqrt{2} - \log 9 + \log \frac{1}{7}$

۲) $\log_3 7 + \log_7 3 + \log_7 2$

۳) $\log \frac{12\sqrt[3]{7}}{\sqrt{2}}$

۴) $\log \frac{49}{9\sqrt{2}}$

(C) معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \log(2x + 10) = 3 \log 2 + \log 3$$

$$۲) \log(x^2 + 3x) = 2 \log(x - 1)$$

$$۳) \log_2(x^2 - 4) - \log_2(4x - 7) = 0$$

$$۴) \log_2(x + 2) + \log_2(x + 3) = 1$$

(D) نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \log_5 3x < 1$$

$$۲) \log_{1/3}(x + 1) \leq \log_{1/3}(2x - 1)$$

$$۳) 2 \log_2 x > \log_2 x$$

$$۴) \log_3(x + 2) > -1$$