فیزیک پایه (مکانیک)

امیرهوشنگ رمضانی چاپ چهارم

جلسه ۱ — ۹۴,۱۱,۱۳

* فیزیک علم اندازه‌گیری است

کمیت: هر چیز قابل اندازه‌گیری کمیت می‌باشد مانند قد، وزن ← ولی خوبی کیفیت است نه کمیت

کمیت اصلی و فرعی

کمیت اصلی در فیزیک مکانیک

اصلی: طول، جرم، زمان

فرعی: هر کمیتی غیر از سه کمیت اصلی

پیشوندهای کاهشی

نام	نماد	مقدار
دسی	d	10^{-1}
سانتی	c	10^{-2}
میلی	m	10^{-3}
میکرو	μ	10^{-6}
نانو	n	10^{-9}
پیکو	p	10^{-12}

پیشوند افزایشی

نام	نماد	مقدار
دکا	D	10
هکتو	H	10^{2}
کیلو	K	10^{3}
مگا	M	10^{6}
گیگا	G	10^{9}
ترا	T	10^{12}

$1\,cm = x\,m$

$1 \times 10^{-2}\,\cancel{m} = x\,\cancel{m}$

$10^{-2} = x$

$10\,ms = x\,Hs$

$10 \times 10^{-3}\,\cancel{s} = x\,10^{2}\,\cancel{s}$

$x = \frac{10^{-2}}{10^{+2}} = 10^{-2-2} = 10^{-4}$

Tip =

$a^b \div a^c = a^{b-c}$

$a^c \div b^c = (\frac{a}{b})^c$

$a^b \times a^c = a^{b+c}$

$a^c \times b^c = (a \times b)^c$

$1\,Gg = x\,ms$

X

$$1\,Gg = x\ mg^2$$
$$1 \times 10^9\ \cancel{g} = x\,(10^{-3})^2\ \cancel{g}$$
$$10^9 = x\ 10^{-6} \quad \times$$
$$x = \frac{10^9}{10^{-6}} = 10^{9+6} = 10$$

$$1\,Gg = x\ mg$$
$$10^9 = x\ 10^{-3}$$
$$x = \frac{10^9}{10^{-3}} = 10^{9+3} = 10^{12}$$

* نمی‌توان واحد طول را به واحد مساحت تبدیل کرد.

$$1\,mm^2 = x\,dm^2$$
$$1 \times (10^{-3})^2 = x\,(10^{-1})^2$$
$$10^{-6} = x\,10^{-2}$$
$$x = \frac{10^{-6}}{10^{-2}} = 10^{-6+2} = 10^{-4}$$

$$1\ \mu s^3 = x\ ns^3$$
$$1 \times (10^{-6})^3\ \cancel{s^3} = x\,(10^{-9})^3$$
$$10^{-18}\ \cancel{s^3} = x\ 10^{-27}$$
$$x = \frac{10^{-18}}{10^{-27}} = 10^{-18+27} = 10^9$$

کمیت های ترکیبی

مثال ۱:
$$1\ \frac{m}{s} = x\ \frac{km}{h} \rightarrow 1\ \frac{m}{s} = x\ \frac{10^3\ \cancel{m}}{3600\ \cancel{s}}$$
$$x = \frac{10\cancel{00}}{36\cancel{00}} \rightarrow 1 = x\,\frac{10}{36} \longrightarrow x = \frac{1}{\frac{10}{36}} \Rightarrow x = \frac{36}{10}$$

مثال ۲:
$$1\ \frac{m}{s^2} = x\ \frac{nm}{ks^2} \longrightarrow 1\ \frac{m}{s^2} = x\ \frac{10^9\,m}{(10^3)^2\,s^2}$$
$$1\ \frac{m}{s^2} = x\ \frac{10^9\,m}{10^6\,s^2} \longrightarrow \cancel{x = \frac{1}{\frac{10^9}{10^6}} = \frac{10^6}{10^9} = 10^{6-9} =}$$
$$1\ \frac{m}{s^2} = x\ 10^{-15} \qquad x = \frac{1}{10^{-15}} \Rightarrow x = 10^{15}$$

فصل ۱

✓ بردارها: کمیتی که علاوه بر اندازه دارای جهت باشند و از قانون جمع برداری تبعیت می‌کنند.

✓ کمیت:
- عددی (نقطه ای، اسکالر): فقط با مقدار یا یک عدد مشخص می‌شود.
- برداری:
  1. مقدار دارد
  2. جهت دارد
  3. از قانون جمع برداری تبعیت می‌کند.

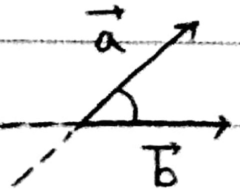
✓ ۱. بردارهای مساوی: $\vec{a} \rightarrow \quad \vec{b} \rightarrow$
- ۱. هم راستا
- ۲. هم جهت
- ۳. هم اندازه

۲. بردارهای متضاد: $\vec{a} \rightarrow \quad \leftarrow \vec{b}$
- ۱. هم راستا
- ۲. جهت شان مخالف است.
- ۳. هم اندازه

$\vec{a} + \vec{b} = 0$

۳. بردارهای هم ارز: $\vec{a} \rightarrow$ ، $\vec{b} \rightarrow$
- ۱. بردارها در راستای موازی قرار دارند.
- ۲. هم جهت
- ۳. هم اندازه

۴. بردارهای متقاطع:



- ۱. در دو راستا قرار دارند.
- ۲. طوری که راستای بردارها با امتدادشان باهم زاویه ای بین ۰ تا 180° می‌سازند.

جمع برداری ← روش هندسی ترسیمی ← ۱- روش مثلثی

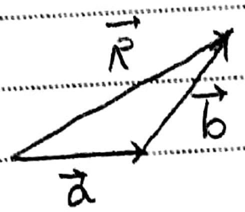
۲- روش چند ضلعی

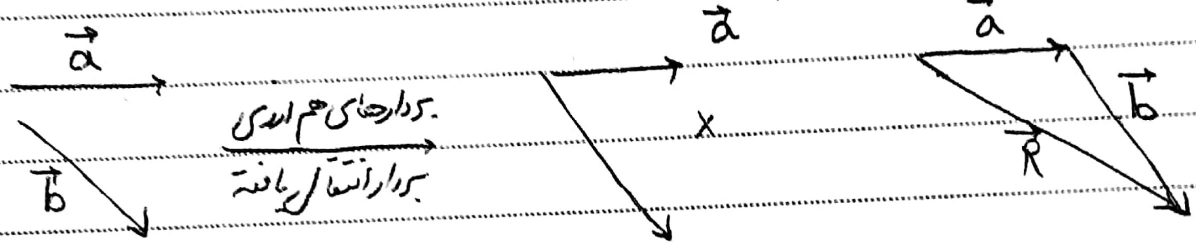
۳- روش متوازی الاضلاع

۲- روش تحلیلی : تجزیه برداری

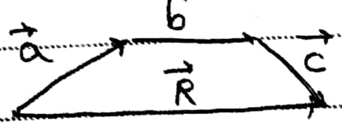
روش مثلثی : در این روش دو بردار داریم به طوری که ابتدای بردار دوم از انتهای بردار اول شروع می شود [دو بردار پشت سر هم هستند] بردار حاصل جمع که از این به بعد بردار برآیند نامیده می شود از اتصال ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم حاصل می شود.

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ جمع برداری

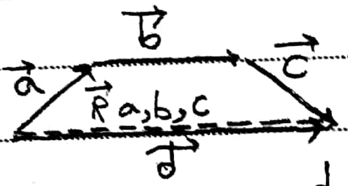




بردارهای منطبق : بردارهایی که نقطه ابتدا و انتهای آن با هم برابر باشند (یکسان)



$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

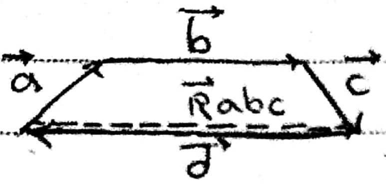


$\vec{R}_{a,b,c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

$d = R_{a,b,c} \Rightarrow R = \vec{d} + \vec{d} = 2\vec{d}$

چون ابتدا و انتهای برابرند



$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

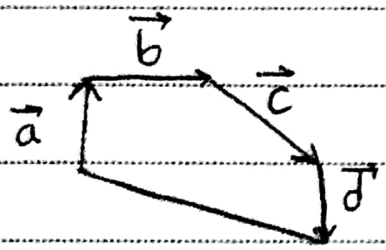
$$\vec{R}_{abc} + \vec{d} \Rightarrow \vec{R}_{abc} = -\vec{d} \rightarrow -\vec{d} + \vec{d} = 0$$

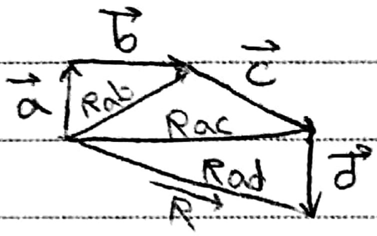
روش چند ضلعی ث (روش تعمیم یافته روش مثلثی)

۱. بیش از دو بردار داریم.

۲. ابتدای هر برداری از انتهای بردار قبل از خودش شروع می شود (پشت سر هم)

۳. برداری که از اتصال ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر حاصل می شود.





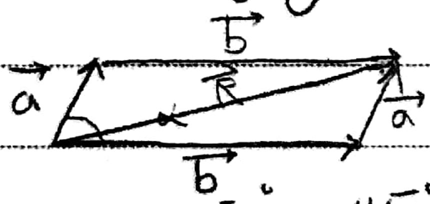
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

روش متوازی الاضلاع

۱. دو بردار متقاطع داریم که از یک نقطه شروع می شوند.

۲. از انتهای هر بردار هم اندازه با بردار دیگر رسم می کنیم تا یک متوازی الاضلاع بدست آید.

۳. برداری که از اتصال دو بردار اول به انتهای دو بردار هم اندازه حاصل می شود.



$$\vec{R} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

	0°	30°	45°	60°	53°	90°	180°	270°	360°	37°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.8	1	0	-1	0	0.6
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0.6	0	-1	0	1	0.8
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		تن	0	تن	0	
cotan	تن	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		0	تن	0	تن	

مثال 1. $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 4$ ، $\cos\theta = 1$

$$\vec{R} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2(3)(4)\cos 0} = \sqrt{9 + 16 + 24} = \sqrt{25 + 24} = \sqrt{49} = 7$$

① if $\theta = 0$ $\quad \vec{R} = \vec{a} + \vec{b} \longrightarrow a + b = 3 + 4 = 7$

2. $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \vec{R} = \sqrt{9 + 16 + 24\cos 30^\circ} = \sqrt{49 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\sqrt{3}} >$

③ if $\quad \vec{R} = \sqrt{a^2 + b^2} \longleftarrow$ زاویه میان دو بردار 90° باشد

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

$$|a-b| \leqslant R \leqslant a+b \quad ✓$$

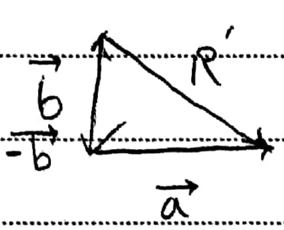
$\theta = 180°$ $\qquad$ $\theta = 0$

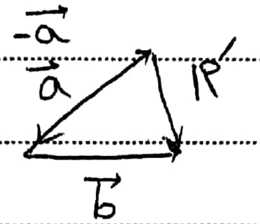
تفاضل (تفریق) برداری

(با استفاده از روش متوازی الاضلاع)

$\vec{R}' = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ $\qquad$ $\vec{R}' = \vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$

هر دو بردار R' یک شباهت مختصر دارند، اینکه طول R' در هر دو تفریق یکی است اما در هر کدام جهت متفاوت است.





$$R' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

مثال: $a = 3$ $\quad$ $b = 4$

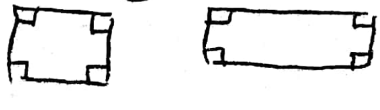
$\theta = 0$ $\qquad R' = \sqrt{9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \cos\theta}$

$R' = \sqrt{25 - 24 \times 1} = 1$

$*$ if $\theta = 0$ $\quad \vec{R}' = \vec{a} - \vec{b} \longrightarrow R' = |a-b|$

$\theta = 90°$ $\qquad R' = \sqrt{25 - 24\cancel{\cos 90}} = \sqrt{25} = 5$

در حالی در روش متوازی الاضلاع قطرهای برابر دارند و در نتیجه برآیند دو بردار و تفاضل آن دو باهم برابر است که متوازی الاضلاع بصورت مربع یا مستطیل باشد



پس هنگامی که زاویه میان دو بردار ۹۰ باشد برآیند و تفاضل دو بردار برابر است.

$\theta = 180^\circ$ $\quad R' = \sqrt{25 - 24(-1)} = \sqrt{25+24} = \sqrt{49} = 7$

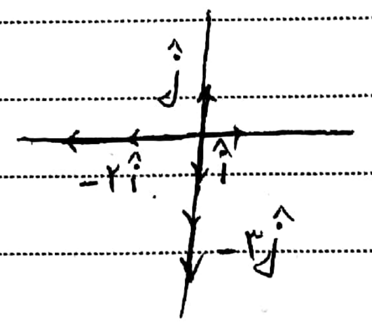
* if $\theta = 180^\circ$ $\quad R' = a+b$

$|a-b| \leq R' \leq a+b$ ✓

$\theta = 0^\circ$ بردار تفاضل $\theta = 180^\circ$

آیا همیشه در متوازی الاضلاع قطر بزرگ برآیند و قطر کوچک آن بردار تفاضل است؟
چرا؟ چند...

روش تحلیلی: تجزیه برداری



بردار یکه: برداری است به طول ۱ در راستای مثبت ($\hat{i}$) محور x ها

برداری است به طول ۱ در راستای مثبت محور y ← $\hat{j}$

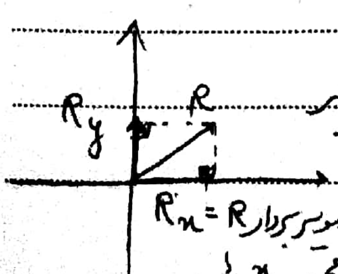
R_y = تصویر بردار R بر محور y ها = مولفه y بردار R

تجزیه: تجزیه بردار به مولفه های اولیه آن

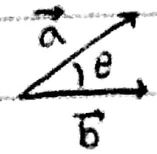
تصویر بردار بر محور: ← ۱- از انتهای بردار به محور مورد نظر عمود رسم کنید

← ۲- پای عمود را مشخص کنید

← ۳- از مبدأ به پای عمود برداری رسم کنید.



if $\theta < 90^\circ$

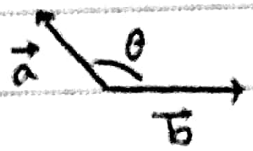


بردار برآیند = قطر بزرگ = R

بردار تفاضل = قطر کوچک = R'

$R > R'$

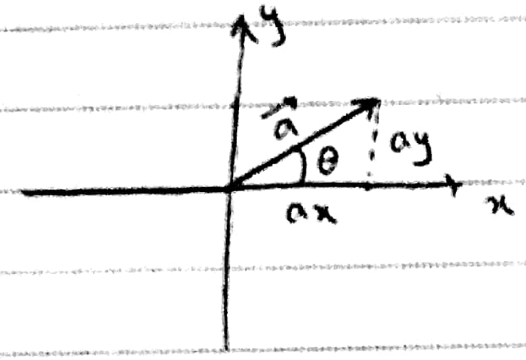
if $\theta > 90^\circ$



بردار برآیند = قطر کوچک = R

بردار تفاضل = قطر بزرگ = R'

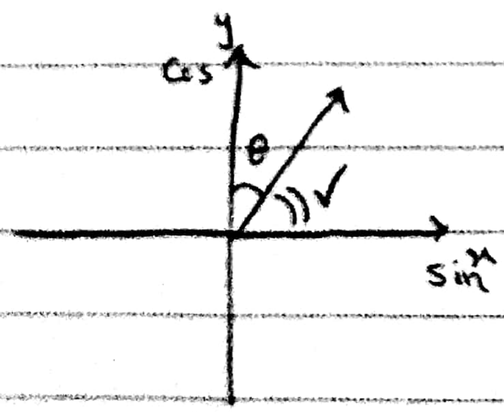
$R' > R$



✓ فرمول اصلی : $(\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j})$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\text{ضلع مجاور زاویه}}{\text{وتر}} \\ \cos\theta = \dfrac{a_x}{a} \\ a_x = a\cos\theta \end{cases}$$

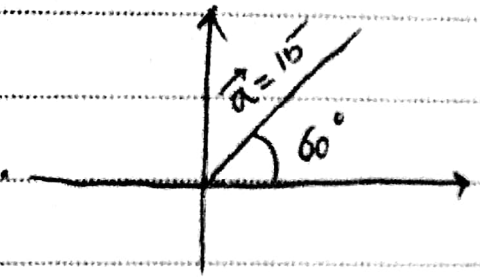
$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \\ \sin\theta = \dfrac{a_y}{a} \\ a_y = a\sin\theta \end{cases}$$



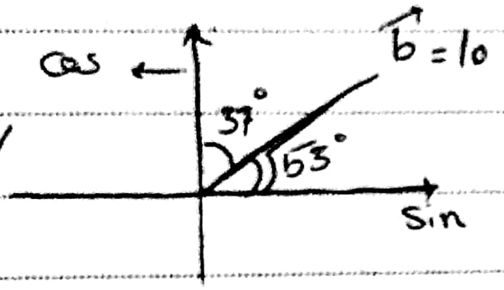
$(= a\cos\theta\hat{i} + a\sin\theta\hat{j})$

* هر محوری که زاویه با آن ساخته شود محور Cos و محور دیگر محور Sin است.

1.



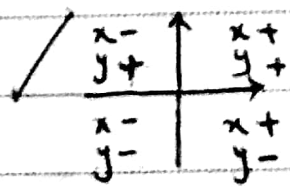
$$\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$$
$$=a\cos 60\,\hat{i}+a\sin 60\,\hat{j}$$
$$=15\times\frac{1}{2}\hat{i}+15\times\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}$$
$$=7.5\hat{i}+\frac{15\sqrt{3}}{2}\hat{j}$$

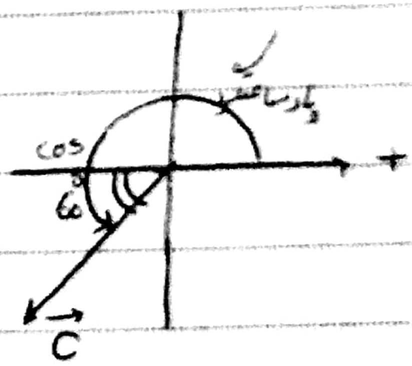


روش اول:

$$\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}$$
$$=b\cos 53\,\hat{i}+b\sin 53\,\hat{j}$$
$$=10\,(0.6)\,\hat{i}+10\,(0.8)\,\hat{j}$$
$$=6\hat{i}+8\hat{j}.$$

$$\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}$$
$$=b\sin 37°\,\hat{i}+b\cos 37°\,\hat{j}$$
$$=10\,(0.6)\,\hat{i}+10\,(0.8)\,\hat{j}$$
$$=6\hat{i}+8\hat{j}$$





* 240° باشی

$$\vec{C}=C_x\hat{i}+C_y\hat{j}$$
$$\vec{C}=C\cos\,\hat{i}+C\sin\,\hat{j}$$
$$=-20\,\frac{1}{2}\,\hat{i}+-20\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{j}$$
$$=-10\hat{i}-10\sqrt{3}\,\hat{j}$$

جلسه ۵

جمع برداری به روش تجزیه ✓

$\vec{a} = -4\hat{i} + 6\hat{j}$

$\vec{b} = 11\hat{i} - 2\hat{j}$

$\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$

$\vec{R} = 10\hat{i} + 0\hat{j}$

$\vec{R} = 10\hat{i}$

$\vec{R}' = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

$\vec{R}' = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

① $\vec{R}_1 = 4\hat{i} + 8\hat{j}$

② $\vec{R}' = -18\hat{i} + 12\hat{j}$

روش صحیح و راحت

$$\vec{R}' = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$$

$\vec{a} = -4\hat{i} + 6\hat{j}$

$\vec{b} = 11\hat{i} - 2\hat{j}$

$-\vec{c} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$

$4\hat{i} + 8\hat{j}$

راه جدید برای بدست آوردن طول در روش متوازی الاضلاع

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$ جمع برداری

if $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Longrightarrow R = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ← این فرمول را اثبات کنیم

مثال:

if $a = b = 3$, $\theta = 120^\circ$

$R = 2(3)\cos\left(\frac{120}{2}\right)$

$R = 6\cos 60$

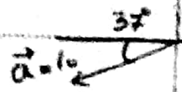
$R = 6 \times \frac{1}{2} = 3$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$ تفاضل برداری ×

if $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Longrightarrow R' = 2a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

TANDIS

تعیین طول و جهت بردار با استفاده از مؤلفه های آن



$|\vec{a}| = 10 \qquad \theta = 37^\circ$ با محور x ها   ناحیه سوم

$\vec{a} = -10\cos 37\,\hat{i} - 10\sin 37^\circ = -8\hat{i} - 6\hat{j}$

طول بردار و زاویه ای که بردار با محور x ها می سازد؟

$\vec{a} = -8\hat{i} - 6\hat{j}$

$\tan\theta = \left|\frac{a_y}{a_x}\right| \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$\theta = \underbrace{\tan^{-1}}_{\text{arc tan}}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) \qquad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 37^\circ$

$a = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = +10$

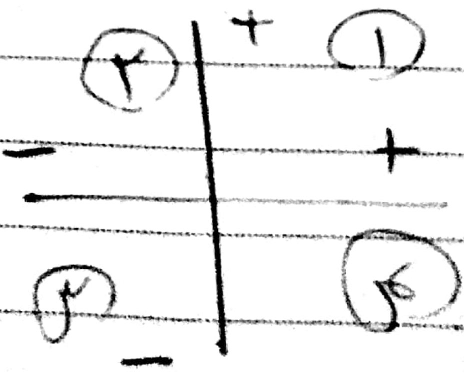
طول بردار زیر چقدر است و چه زاویه ای با محور x ها می سازد؟

$R = \sqrt{2}\,\hat{i} - \sqrt{2}\,\hat{j}$

$a = \sqrt{(\sqrt{2}^2) + (-\sqrt{2}^2)} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

ناحیه چهارم

$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = (-)1 = 1 \longrightarrow \theta = 45^\circ$



ناحیه ها

ضرب برداری —— ۱. ضرب عدد در بردار

۲. ضرب بردار در بردار —— ۱. ضرب داخلی (نقطه‌ای، اسکالر)

۲. ضرب خارجی ـ ضرب برداری

۱. ضرب عدد در بردار

$m \rightarrow$ عدد

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$m \times \vec{a} = m a_x \hat{i} + m a_y \hat{j} + m a_z \hat{k}$$

مثال:

$$\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k} \qquad \vec{R} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\vec{b} = -5\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{R} = (6\hat{i} - 4\hat{j} + 14\hat{k}) - (-15\hat{j} + 3\hat{k}) = 6\hat{i} + 11\hat{j} + 11\hat{k}$$

۲. ضرب داخلی (نقطه‌ای) ← کمیت عددی (جابجاپذیر است)

$$* \; \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

اگر طول a و طول b و θ مشخص باشد:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

$$a = \sqrt{2} \quad b = 5 \quad \theta = 45^\circ \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2}(5) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} \times 5 = 5$$

① $a \cdot b = |a||b| \cos\theta$

② $\begin{cases} a = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ b = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$\begin{cases} i \cdot i = 1 \\ j \cdot j = 1 \end{cases} \quad z \cdot z = 1$

روش دوم ضرب داخلی ← $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

مثال: زاویه میان دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

$\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$

$\vec{b} = 8\hat{i} + 6\hat{j}$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{8^2 + (+6)^2} = 10$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$

$0 = 5\times10\cos\theta \rightarrow 0$

$\theta = 90^\circ$

36
64

$a\cdot b = 24 - 24 = 0$

ضرب خارجی ← کمیت برداری ← قابلیت جابه‌جایی وجود ندارد.

$\vec{C} = \vec{a}\times\vec{b}$

$*\ \vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$ ↳ Cross

اگر طول a و b و θ مشخص باشد:

$C = ab\sin\theta$

مثال:

$a = 8$ $\quad C = 8(3)\sin 37^\circ$

$b = 3$ $\quad C = 24\times0.6 = 14.4$ ← جهت بردار مشخص

$\theta = 37^\circ$

نسبت دو با قانون دست راست مشخص می‌شود.

$a\times b = |a||b|\sin\theta$

$$c = a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

ماتریس

TANDIS

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

روش دوم ضرب خارجی

برای کاسیم $\hat{i}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\underbrace{(a_y b_z - a_z b_y)}_{C_x} - \hat{j}\underbrace{(a_x b_z - a_z b_x)}_{C_y} + \hat{k}\underbrace{(a_x b_y - a_y b_x)}_{C_z}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

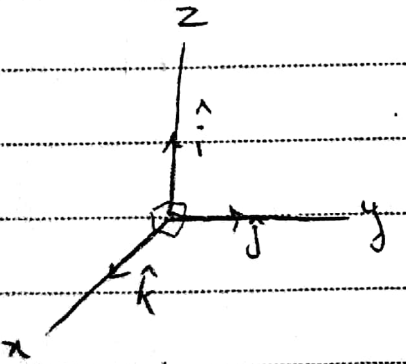
مثال:

$\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ $\qquad$ $\vec{b} = -5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{C} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\big((-2 \times -2) - (1 \times 3)\big) - \hat{j}\big((3 \times -2) - 1(-5)\big) + \hat{k}\big((3(3)) - (-2 \times -5)\big)$$

$$= \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \qquad C = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$



* ضرب داخلی بردارهای یکه

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1(1)\cos 0 = 1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 1(1)\cos 90 = 0$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0$$

$$\hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

$* \ (a \times b) = -(b \times a)$

ضرب خارجی

$\hat{i} \times \hat{i} = 1(1)\sin 0 = 0$

$\hat{j} \times \hat{j} = 0$

$\hat{k} \times \hat{k} = 0$

$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}$

$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$

پادساعتگرد مثبت +

* $\times$ ← عمود بر صفحه به سمت داخل

$\cdot$ ← عمود بر صفحه به سمت خارج (بیرون)

$i \times j = k$

$j \times k = i$

مثال: اگر $a = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $b = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ مطلوبست

الف) $a \times b$

ب) $b \times a$

ج) $a \cdot b$

د) $|a|$

ه) $a + b$

و) $a - b$

ز) $|b|$

الف) $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - 3j + 13k$

اگر $a = 3i + 2j$ و $b = -2i + j + 2k$ مقدار $a \times b$

$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 0)i - (6 - 0)j + (\underbrace{3 - (-4)}_{3+4})k$

$= 4i - 6j + 7k$

فصل ۲ : حرکت در امتداد خط

سرعت : جابه‌جایی در واحد زمان (تغییرات مکان در تغییرات زمان) (واحد $\frac{m}{s}$ یا $\frac{Km}{h}$) $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

شتاب : تغییرات سرعت در واحد زمان (در سرعت ثابت شتاب نداریم) (واحد $\frac{m}{s^2}$) $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$

با افزایش یا کاهش مقدار و جهت سرعت، سرعت تغییر می‌کند زیرا سرعت کمیتی برداری است.

* حرکت

۱- حرکت با سرعت ثابت (بدون شتاب) : حرکت مستقیم الخط یکنواخت ← t به توان ۱

۲- حرکت با سرعت متغیر، حرکت شتابدار

- t به توان ۲ ← حرکت با شتاب ثابت
- t به توان از ۲ بیشتر ← حرکت با شتاب متغیر

- حرکت مستقیم الخط یکنواخت (تغییر جهت و تغییر مقدار سرعت نداریم)

x_0 = مکان اولیه

$\Delta t = t - t_0 \xrightarrow{\text{در اغلب موارد}} = 0 \rightarrow \Delta t = t$

$x(t)$ = معادله مکان بر زمان
مکان لحظه ای متحرک

Δx = جابه‌جایی $= x_2 - x_1$

$v(\frac{m}{s})$ = سرعت

فرمول های این فصل:

$x(t)$ $\quad x = \underset{\text{سرعت}}{v}\,\overset{\text{مدت زمانی}}{t} + x_0 \rightarrow$ مکان اولیه $\rightarrow \Delta x = vt$ (تغییرات مکان)

$\bar{v} = v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

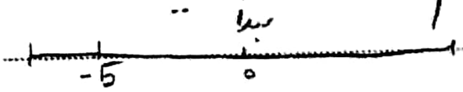
سرعت لحظه ای = سرعت در یک زمان مشخص

سرعت متوسط = سرعت در یک بازه زمانی

= در حرکت یکنواخت سرعت لحظه ای و متوسط برابر است.

جسمی در 5 متری سمت چپ مبدأ قرار دارد. اگر این جسم در مدت 2 دقیقه 36cm حرکت کند مطلوب است.

$2\,min = 120\,s$



الف) مکان اولیه متحرک $\rightarrow -5\,m$

ب) سرعت متحرک

ب) $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad v = \frac{360}{120} = 3\,\frac{m}{s}$

ج) معادله مکان زمان

د) مکان جسم در لحظه $t = 10$

و) سرعت متوسط متحرک از $t = 2$ تا $t = 5$

ج) $x = vt + x_0$

$x = 3t - 5$

د) $x = 3(10) - 5 = 25\,m$

$$\begin{cases} t = 2 \rightarrow x_2 = (3\times 2) - 5 = 1 \\ t = 5 \rightarrow x_5 = (3\times 5) - 5 = 10 \end{cases}$$

و) $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_5 - x_2}{5 - 2} = \frac{10 - 1}{3} = 3\,\frac{m}{s}$

$x_5 = 10$

$x_2 = 1$

- حرکت با سرعت متغیر (حرکت شتابدار با شتاب ثابت)

مشتق، آهنگ تغییر تابع

$$f(x) = ax^{n} + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + n$$

$$f(x) = x^{9} + 3x^{8} + 2x^{7} + \dots + 5$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = a(n)\,x^{n-1} + b(n-1)\,x^{n-2} + c\,(n-2)\,x^{n-3}$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 9x^{8} + 24x^{7} + 14x^{6} + \dots + 0$$

معادله مکان یا مکان لحظه‌ای متحرک

$$x = \frac{1}{2}\underbrace{a}_{\text{شتاب}}t^{2} + \underbrace{v_0}_{\text{سرعت اولیه}}t + \underbrace{x_0}_{\text{مکان اولیه}}$$

لحظه‌ای $v = \frac{dx}{dt} = at + v_0$ متوسط $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$

چون شتاب ثابت است شتاب لحظه‌ای و متوسط برابر است   لحظه‌ای $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \bar{a}$ متوسط

$$v_2^{2} - v_1^{2} = 2a\Delta x$$ معادله مستقل از زمان

حرکت با سرعت متغیر، شتاب متغیر

$x(t) =$ تابعی از t است با درجه ۲ یا بیشتر

سرعت لحظه‌ای $v = \frac{dx}{dt}$ ، سرعت متوسط: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

شتاب لحظه‌ای $a = \frac{dv}{dt}$ ، $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

مثال: با توجه به رابطه $x = 3t^3 - 5t^2 + 1$ به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱) نوع حرکت؟ درجه 3 - معادله شتاب متغیر با سرعت متغیر

۲) مکان اولیه؟ علامت ثابت در معادله (جای t صفر قرار می‌دهیم)

۳) سرعت اولیه؟ $v_0 = 0$

۴) سرعت لحظه‌ای در لحظه $t=2$

۵) سرعت متوسط از ۰ تا 2 ثانیه

۶) شتاب لحظه‌ای در لحظه $t=2$

۷- شتاب متوسط از ۰ تا 2 ثانیه

۲) $x = +1$

۳) $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow 9t^2 - 10t$ ← معادله سرعت

۴) $v = 9(2)^2 - 10(2) = 16 \frac{m}{s}$

۵) $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5-1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2 \frac{m}{s}$

$x = 3(2)^3 - 5(2)^2 + 1 = 24 - 20 + 1 = 5$

۶) $a = \frac{dv}{dt} = 18t - 10$

۷) $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16-0}{2-0} = \frac{16}{2} = 8 \frac{m}{s^2}$

$v_{2s} = 9(2)^2 - 10(2) = 36 - 20 = 16 \frac{m}{s}$

فصل ۴ : قوانین نیوتن

نیرو، کشش و برهم کنش اجسام

انواع نیرو

۱ـ نیروی گرانشی ـ تبادل نیروی دو جسم دارای جرم

۲ـ نیروی الکتریکی =

۳ـ نیروی قوی هسته ای (ضعیف هسته ای) واپاشی ذرات هسته ای

۴ـ نیروی وزن

۵ـ نیروی فنر

۶ـ نیروی اصطکاک

و ...

تعریف نیرو :

۱ نیوتن عبارت است از نیرویی که به جسمی به جرم 1kg به شتاب $1\frac{m}{s^2}$ وارد می کند.

قانون اول نیوتن = تا زمانی که به جسم نیرویی وارد نشود جسم در حال تعادل است و حالت حرکت جسم تغییر نمی کند. (قانون لختی)
منظور از حالت حرکت یعنی اگر جسم در حال سکون است ساکن باقی می ماند و اگر در حال حرکت است با سرعت ثابتی به حرکت خود ادامه می دهد.

قانون دوم نیوتن :

برآیند نیروهای وارد بر جسم با حاصلضرب جرم جسم در شتاب جسم برابر است
شتاب وارد بر جسم با نیرو نسبت مستقیم و با جرم جسم نسبت عکس دارد.

قانون سوم : قانون سوم نیوتن   قانون عمل و عکس العمل نام است.

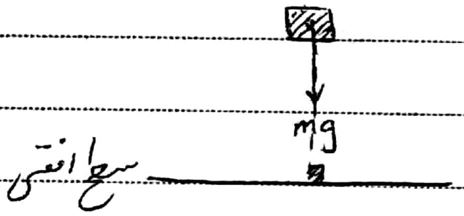
برای هر عملی عکس العملی است مساوی با آن و در خلاف جهت.

آیا نیروها همدیگر را خنثی می کنند؟ خیر زیرا در عمل و عکس العمل نیرو به دو جسم وارد می کنند.

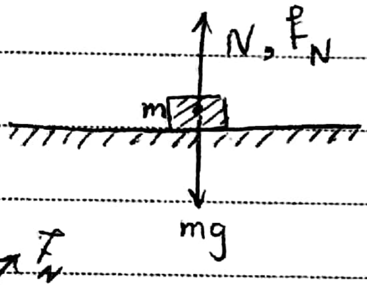
معرفی نیروها

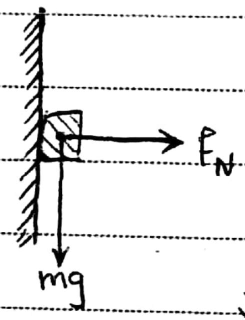
۱- نیروی وزن

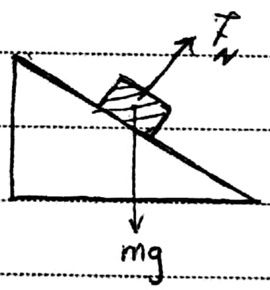
$W = mg$ (g: m/s^2, m: kg)

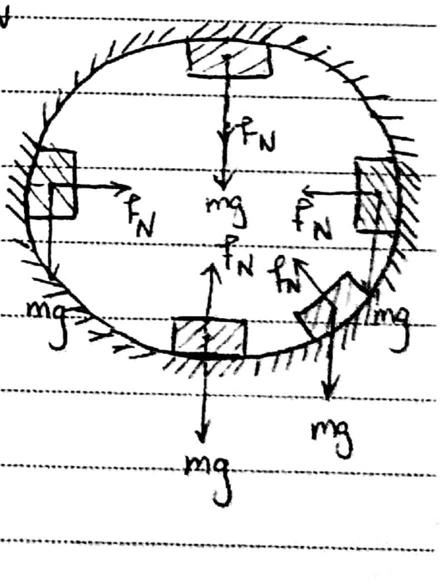


۲- نیروی عمود بر سطح

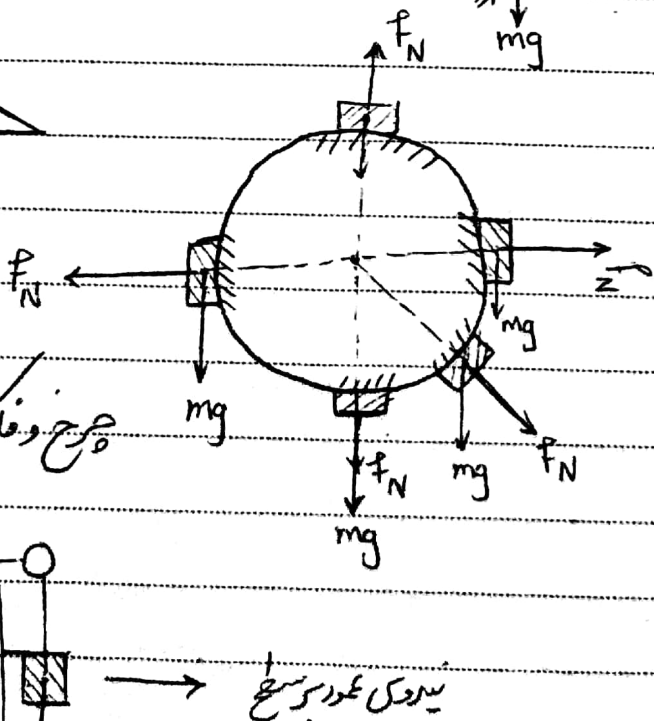


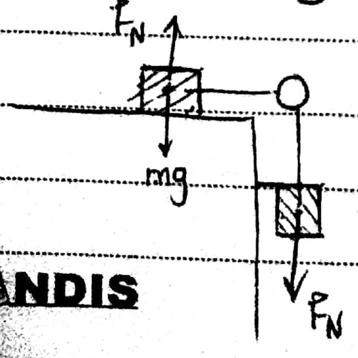






چرخ و فلک





نیروی عمود بر سطح ندارد چون سطحی وجود ندارد

... سطوح اصطکاک

قانون دوم نیوتن

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \cancel{\sum F_z = ma_z} \end{cases}$$

سیگما

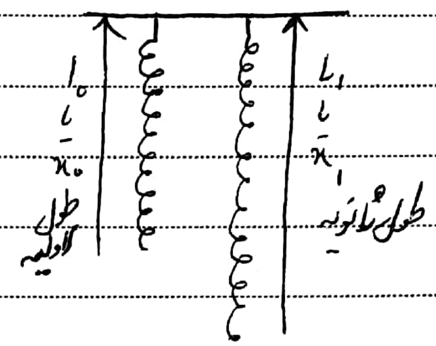
$\cancel{\sum F_z = ma_z} \longrightarrow$ چون در فضای دو بعدی می باشیم

۳_ نیروی فنر

$F = -k\Delta x$

یا

$(N)\, F = -k\Delta l \longrightarrow$ تغییرات طول فنر ، ثابت فنر $(\frac{N}{m})$

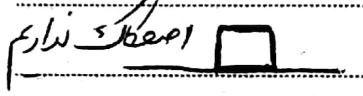


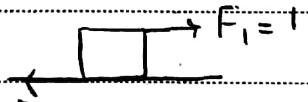
$\Delta L = L_1 - L_0$ یا $\Delta x = x_1 - x_0$

۴_ نیروی اصطکاک

$\longleftarrow$ زمانی نیرو وجود دارد که به آن نیرو وارد شود (قانون اول)

زمانی نیروی اصطکاک وجود دارد که به آن نیرو وارد شود.





$f_s = F$ جسم حرکت نمی کند

$F_3 = 15N$ ... 15.000001 آغاز حرکت

$f_{s_2} = F_2 = 10$ $\quad$ $f_{s_3} = 15N$

$f_{s\,max}$: نیروی اصطکاک ایستایی ماکزیمم (اصطکاک ایستایی آستانه حرکت)

$= \mu_s \cdot F_N$

μ_s ← ضریب اصطکاک ایستایی

F_N → نیروی عمود بر سطح

روشهای حل مسائل دینامیک:

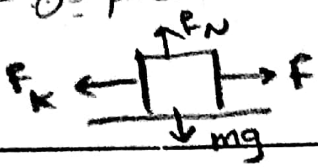
۱- رسم شکل ۲- رسم نیروها ۳- قانون دوم نیوتن ۴- بررسی شتاب

محور y: $a_y = 0$

محور x: $a_x = 0$

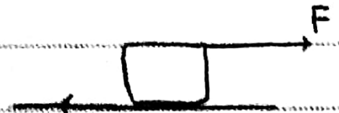
سکون: $a_x = 0$، $a_y = 0$

Subject: .... Year: .... Month: .... Day: .... ( )



$\Sigma F_x = ma_x \longrightarrow F - f_K = ma_x$

$\Sigma F_y = ma_y \longrightarrow F_N - mg = ma_y$



f_k و f_s ثابت (μ_k و μ_s) ثابت های بدون بعد می باشند که به طبیعت به جنس و به شکل سطح بستگی دارد و برای هر جسم متفاوت است.

f_k نیروی اصطکاک جنبشی یا لغزشی

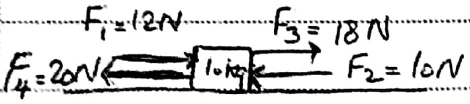
$f_K = \mu_K F_N$

$\boxed{0 < \mu_K < \mu_s < 1} \longleftarrow *$

[redacted] جلسه ۱۰

مسئله ۱: در مسائلی که حرکت جسم مشخص است جهت حرکت + است.

+ راست، چپ منفی



$\Sigma F = \begin{cases} \Sigma F_x \\ \Sigma F_y \end{cases}$

$\Sigma F = ?$

$a = ?$

$\Sigma F_x = ma_x$

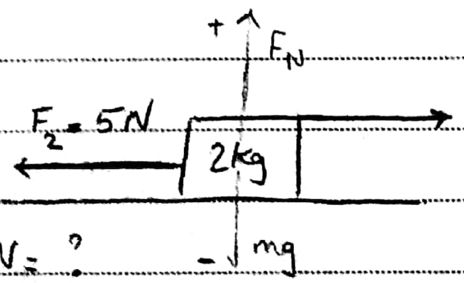
$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = 10a$

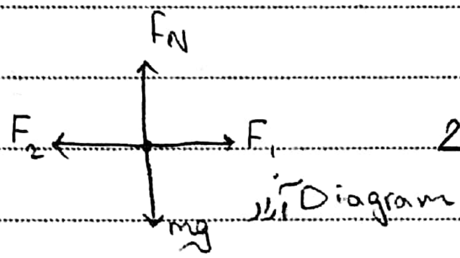
$12 - 10 + 18 - 20 = 10a$

$0 = ma = 10a \longrightarrow a = 0$

$\Sigma F = 30 - 30 = 0$

مسئله 2





$F_N = ?$

$a_y = ?$

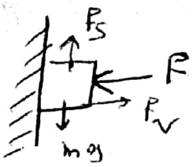
هنگامی که سطح روی سطح قرار گرفته باشد و در راستای محور y ها یا حرکت نمی کند یا حرکت با سرعت ثابت داشته باشد جسم در آن حالت و در آن راستا شتاب ندارد.

$a_y = 0 \longleftarrow$ پس

در راستای y ها $\Sigma F_y = ma$ $\quad F_N - mg = ma$

$F_N - 2\times 10 = 2\times 0 \rightarrow F_N = 20N$

مثال: در شکل مقابل جسمی به وزن ۱۲N به وسیله نیروی افقی F به دیوار قائم با ضریب اصطکاک $\frac{1}{4}$ فشرده می‌شود حداقل نیروی F چقدر باشد تا جسم به پایین نیاید؟



Subject: ....

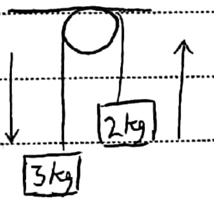
Year: .... Month: .... Day: .... ( )

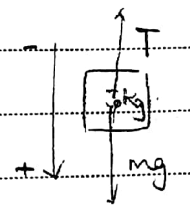
در راستای x: $\sum F_x = ma_x$

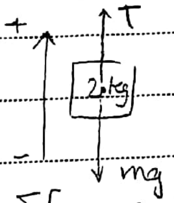
$F_1 - F_2 = ma$

$12 - 5 = 2a$

$7 = 2a \qquad a = \frac{7}{2} = 3.5 \frac{m}{s^2}$







مسئله 3

نکته: همانطور که می‌بینیم با توجه به شکل کدام جسم بالا و کدام پایین می‌آید

T = ?

a = ?

$\sum F_y = ma \qquad \sum F_y = ma$

$mg - T = ma \qquad T - mg = 2a$

$30 - T = 3a_1 \quad = \quad T - 20 = 2a_2$

بالا: $T - mg = ma$

پایین ← $mg - T = ma$

$$\begin{cases} 30 - \cancel{T} = 3a \\ \cancel{T} - 20 = 2a \end{cases}$$

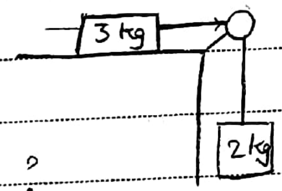
$10 = 5a \rightarrow a = \frac{10}{5} = 2 \frac{m}{s^2}$

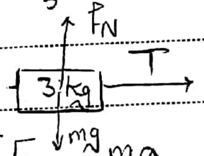
$T - 20 = 2(2)$

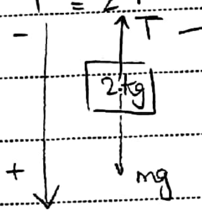
$-20 - 4 = -T$

$T = 24$ نیروی کشش طناب

مسئله 4







T = ?

a = ?

$\sum F_x = ma$

$T = ma$

$T = 3a$

$\sum F_y = ma$

$mg - T = 2a \rightarrow 20 - T = 2a$

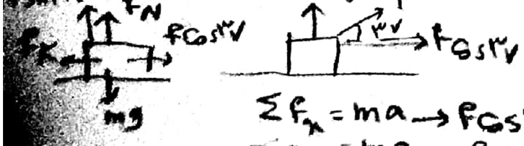
$$\begin{cases} T = 3a \\ 20 - T = 2a \end{cases}$$

$20 = 5a \quad a = \frac{20}{5} = 4 \frac{m}{s^2}$

$T = 3(4) \Rightarrow T = 12$

مثال: به کمک نیروی F شکل جسمی به جرم 5kg را که در ابتدا ساکن بوده به حرکت در می‌آوریم

اگر ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۲ و نیروی F=20N باشد سرعت و جابجایی جسم پس از 10s؟



$v_2 = at + \cancel{v_1}$

$v_2^2 - \cancel{v_1^2} = 2a\Delta x$

سکون $v_1 = 0$

$m = 5$

$\mu_k = \frac{2}{10}$

$F = 20$

$v_2 = ?$

$\Delta x = ?$

$\Delta t = 10$

$\sum F_x = ma \rightarrow F\cos 37 - F_k = ma$

$\sum F_y = ma \rightarrow F_N + F\sin 37 - mg = 0$

Scanned by CamScanner

توان

میزان مصرف یا تولید انرژی (کار) در واحد زمان را توان گویند و واحد آن وات است.

$\boxed{W = Fd\cos\theta}$

$P = \frac{E}{t} = \frac{W}{t}$ ($\frac{J}{s} = W$ وات) $P = \vec{F}\cdot\vec{V}$

مثال 6-8 کتاب ص 151 فرد ورزیده به جرم 50 kg از پله ها در مدت ۱۵ دقیقه بالای برج؟ توان متوسط او ($h=443^m$)

$m = 50\ kg$

$h = 443\ m$ $P = \frac{mgh}{t} = \frac{50\times 9.8\times 443}{900} = 241\ W$

$\Delta t = t = 15\ min = 900\ s$

$241\ W = ?\ kW \xrightarrow{\div 10^3} 0.241\ kW$

$Ra = \frac{\text{کار مفید}}{\text{کل کار}}\times 100 = \frac{\text{توان مفید}}{\text{توان کل}}\times 100 = \frac{\text{انرژی مفید}}{\text{انرژی کل}}\times 100$ بازده

$E = E' + E'' \longrightarrow$ انرژی اتلافی

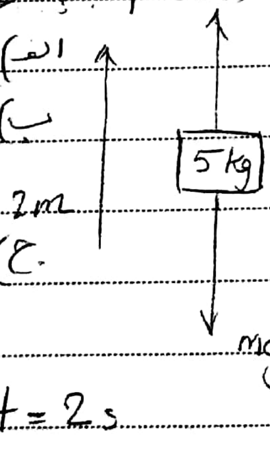
انرژی کل   مفید (مصرفی)

مثال 9: جسمی به جرم 5kg به ریسمانی متصل است اگر جسم با شتاب $0.2\ \frac{m}{s^2}$ رو به بالا به اندازه 2m در راستای قائم جابجا شود

الف) مقدار کشش ریسمان

ب) کار انجام شده توسط ریسمان

ج) توان ریسمان در مدت ۲ ثانیه



$\Sigma F_y = ma_y \longrightarrow T - 50 = 5\times 0.2$

$T - mg = ma$ $T = 51\ N$

$W_T = \vec{T}\cdot\vec{r} = 51\times 2\times \cos 0$ $\longrightarrow \theta = 0$

از فرمول کار $w = f.d\cos\theta$ $= 102\ J$

$mg = 50\ N$

$\Delta t = 2\ s$ $P_T = \frac{W_T}{t} = \frac{102}{2} = 51\ W$

$a = 0.2\ \frac{m}{s^2}$

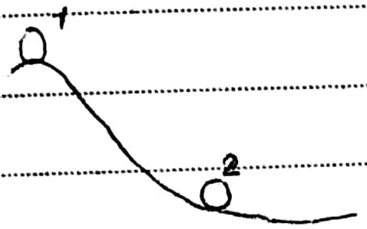
فصل 7 : "پایستگی انرژی"

نیروی مکانیکی ← مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل

نیروی پایستار : نیرویی است که کار آن مستقل از مسیر است و فقط به نقطه شروع و پایان بستگی دارد مانند نیروی وزن ـ نیروی الکتریکی

کار نیروی پایستار در مسیر بسته (رفت و برگشت) صفر می باشد.

نیروی ناپایستار : نیرویی است که کار آن به مسیر بستگی دارد و کار آن روی مسیر بسته صفر نمی باشد. مانند



$E_1 = E_2$

اصطکاک $E_1 = E_2$ بدون اصطکاک

$\Delta E = E_2 - E_1 = W'_f$ کار نیروی اصطکاک (همواره منفی)

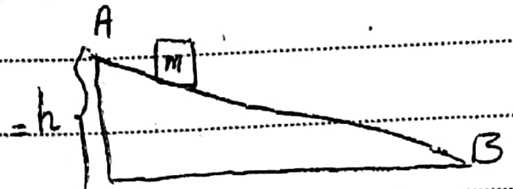
مثال ۱ را نمی خوانیم 2 حذف

یک جسم m در بالای سطح شیبداری به ارتفاع h قرار دارد اگر جسم از حالت سکون شروع به حرکت کند سرعت جسم در پایین

مثال 3 ص 166 از

$v_A =$ ساکن $= 0$

مسیر بدون اصطکاک



$v_B = ?$

$E_1 = E_2$ $\qquad E_A = E_B$

$E_A = \cancel{K_A}^{0} + U_A \qquad E_A = 0 + mgh \qquad \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$

$E_B = K_B + \cancel{U_B}^{0} \qquad E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad 2gh = v_B^2$

$v_B = \sqrt{2gh}$

فصل 8 :

تکانه (اندازه حرکت خطی) ، ضربه ، مرکز جرم

✓ تکانه : به حاصلضرب جرم در سرعت یک جسم تکانه یا اندازه حرکت خطی می‌گویند .

تکانه را با p نشان می‌دهند .

$$\vec{p} = m\vec{v} \longrightarrow \begin{cases} p_x = mv_x \\ p_y = mv_y \\ p_z = mv_z \end{cases}$$

Tip $\Longleftarrow$ $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ قانون دوم

رابطه نیرو با تکانه : $\bar{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$ (نیروی متوسط را می‌گوید) $\quad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ نیروی لحظه‌ای

✓ مثال ✓ جسمی به جرم 2kg با سرعت $5 \frac{m}{s}$ در راستای محور x ها در حال حرکت است . اندازه حرکت ؟

$m = 2\,kg$

$\vec{v}_x = 5 \frac{m}{s}$

$p_x = mv_x \qquad p = 2 \times 5 = 10 \frac{m}{s} kg$

اگر همین جسم در راستای محور y ها با سرعت $4 \frac{m}{s}$ حرکت کند ✓ تغییرات اندازه حرکت ؟

$\vec{v}_y = 4 \frac{m}{s} \qquad p_y = mv_y \Longrightarrow 2 \times 4 = 8$

$$\Delta P = P_2 - P_1 \Longrightarrow \Delta P = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

$$\Delta P = \sqrt{64 + 100 - 2(8)(10)\cos 90} = \sqrt{164}\ kg\frac{m}{s} = 12.8$$

$v_x = 5 \frac{m}{s}$ $\qquad P_x = 2 \times 5 = 10$

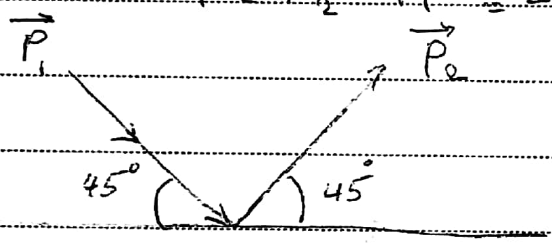
v_{-x} حالت محور $= -3 \frac{m}{s}$ $\qquad P_{-x}$ حالت محور $= 2 \times 3 = -6$

$\Delta P = \sqrt{100 + 36 - 2(10)(6)\cos 180} = \sqrt{136 + 120} = \sqrt{256} = 16$

Tip: $\Delta P = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

$= m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\Delta\vec{v}$

$\theta = 180^\circ \quad \Delta P = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = -6 - 10 = -16 \quad |\Delta P| = 16 \, kg \frac{m}{s}$ روش ۲



مثال : روش ۱ :

$m = 5 kg$ $\qquad \vec{\Delta P} = m \vec{\Delta v}$

$v_1 = 30 \frac{m}{s}$ $\qquad P_{1,2} = m \times v_1 = 5 \times 30 = 150 \, kg \frac{m}{s}$

$v_2 = 30 \frac{m}{s}$

$\Delta P = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2ab\cancel{\cos\theta_{90}}}$ $\; 0$

$\Delta P = \sqrt{150^2 + 150^2} = \sqrt{22500 + 22500} \simeq 212.13 \, kg \frac{m}{s}$

Tip: $a = b$ $\qquad$ روش ۲ :

$R' = 2a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ $\qquad v_1 = v_2 \quad \Delta v = |v_2 - v_1|$

$\Delta P = m\Delta v =$ $\qquad = 2v_1 \sin\frac{\theta}{2} = 2 \times 30 \times \sin\frac{90}{2}$

$5 \times 30\sqrt{2} = 150\sqrt{2} \simeq 210$ $\qquad = 30\sqrt{2}$

کمیت پایسته: هر کمیتی که در طول زمان تغییر نکند.

پایستگی اندازه حرکت: یعنی در حالت ۱ و 2 اندازه حرکت تغییری نکند.
به عبارتی پایستگی یک حرکت $\Delta = 0$

اگر تکانه پایسته باشد $\vec{P_2} = \vec{P_1}$

$$\Delta P = \vec{P_2} - \vec{P_1} = 0$$

$$\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad , \quad \Delta P = 0 \longrightarrow \bar{F}$$

$$\frac{dP}{dt} = 0 \longrightarrow \Sigma F = 0$$

به شرطی تکانه پایسته است که هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نشود.

مثال 2 و 3 و 4 و 5 بخونیم قسمت برخورد ناکشسان و برخورد کشسان

۹۵/۲/۷

جلسه

تفنگی به جرم ۳ kg به طور آویزان در حال سکون ... پس از شلیک سرعت ... چه ... دارد

مثال 8-2

گلوله‌ای به جرم ۵ با سرعت $V_B = 300 \frac{m}{s}$ از تفنگ ... شلیک می‌شود سرعت پس‌زنی V_R تفنگ ؟

قبل از شلیک / دستگاه ذرات: $P = P_A + P_B$

پس از شلیک: $P' = P'_A + P'_B$

M_{A} تفنگ $= 3\ kg$

M_{B} گلوله $= \frac{5}{1000}\ gr = 0.005\ kg$

V_{B} گلوله $= 300 \frac{m}{s}$

... چون نیروی خارجی وارد نمی‌شود اصل پایستگی اندازه حرکت برقرار است

$P = P' \Longrightarrow \Delta P = P - P' = 0 \Rightarrow F = 0$ ... گلوله و تفنگ P

$V_A = ?$

چون حرکت هم جهت است ΔP نداریم P ها جابجا نشو

$$P = P \Longrightarrow 0 = M_A \times V_A + M_B \times V_B \qquad \Delta P = 0 \rightarrow P_1 + P_2 = 0$$

$$(3 \times V_A) + (0.005 \times 300) = 0$$

$K_A , K_B = 0$

$$3V_A + 1.5 = 0 \qquad 3V_A = -1.5 \qquad V_A = \frac{-1.5}{3} = -0.5 \frac{m}{s}$$

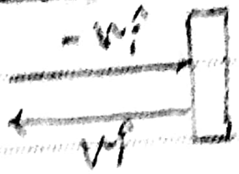
TANDIS

[illegible]

Subject: [illegible]

Year: Month: Day:

یادآوری 2.5 ✓



m $\quad$ $\bar{F} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$

v $\quad$ $\vec{v_1} = -v\hat{i}$

t $\quad$ $\vec{v_2} = v\hat{i}$ $\quad$ $\overrightarrow{\Delta P} = P_2 - P_1 = mv_2 - mv_1$

$\bar{F} = ?$

$\overrightarrow{\Delta P} = mv\hat{i} - m(-v\hat{i}) \longrightarrow mv\hat{i} + mv\hat{i}$

$\Delta P = 2mv\hat{i} \cdot \Delta P = 2mv$ $\quad$ $\bar{F} = \dfrac{2mv}{t}$

ضربه : (J)

$J = F\Delta t$ $\quad\quad$ $J = \Delta P$

سه مرحله همراه با حل مسئله

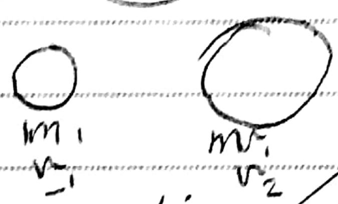
۲ مثال در سیستم کتاب

برخورد : $P' = (m_1 + m_2)v$ $\longrightarrow$ (m_1+m_2) $\longrightarrow$ به هم برخورد کرده می‌چسبند

مرحله سوم

برخورد ناکشسان

$P = m_1v_1 + m_2v_2$



در برخوردها همواره اصل بقای اندازه حرکت خطی برقرار است.

$\Delta P = 0$

$P = P'$

$$P = P'$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

سرعت جسم پس از برخورد ناکشسان $\quad v = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{(m_1 + m_2)}$

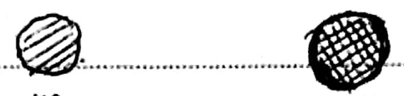
برخورد کشسان : مانند برخورد ناکشسان اصل بقای اندازه حرکت خطی برقرار است.

نیروی خارجی

$$F_{ext}=0 \longrightarrow \Delta\vec{p}=0 \longrightarrow \vec{p}=\vec{p}\,'$$

علاوه بر این اصل بقای انرژی جنبشی نیز برقرار است.

$$K=K'$$



m_1 m_2

v_{1i} سرعت اولیه جسم ۱

v_{2i} سرعت اولیه جسم ۲

$v_{1f}=?$ سرعت نهایی جسم ۱

$v_{2f}=?$ سرعت نهایی جسم ۲

$$\begin{cases} 1.\ m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f} \\ 2.\ \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_2+m_1}v_{1i}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{2i}$$

$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}v_{2i}$$

مثال برخورد کشسان

جسمی به جرم ۶۰ g با سرعت اولیه $10\frac{m}{s}$ با
جرم ساکن به جرم ۴۰ g برخورد کشسان انجام
می دهد سرعت هر دو جسم پس از برخورد؟

$m_1 = \frac{60}{1000}\ gr$

$v_1 = 10\ \frac{m}{s}$

$m_2 = 40gr$ (حالت ساکن)

$v_2 = 0$

$v_{1,2f} = ?$

$$v_{1f} = \frac{0.06 - 0.04}{0.1} \times 10 = 2$$

مثال حل شده

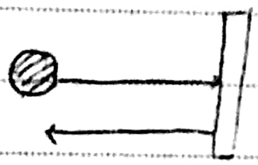
$$v_{2f} = \frac{2 \times 0.06}{0.1} \times 10 = 12$$

مثال 7_8 ص ۱۹۷ می خوانیم

ص 198 و ۱۹۹ حذف

$J = \Delta P$

مثال 10_8 ص 201



توپ

$M = 0.04\ kg$

$v_1 = 30\ \frac{m}{s} = -30$

$v_2 = 20\ \frac{m}{s}$

$J_{ضربه} = ?$

$\Delta t = 0.01$

$J = \Delta P$

$\Delta P = m\Delta v$

$\Delta P = 0.4 \times (20-(-30)) = 0.4 \times 50 = 20\ \frac{kg\,m}{s}$

$$\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{20}{0.01} = 2000\ N$$

مثال 8.11 می خوانیم ص 202

مرکز جرم :) یک نقطه فرضیست که بوسیله آن می توان اصل بقای جرم را توضیح داد.

اجسامی که مورد بررسی قرار می دهیم ۱- می بایست متقارن باشند

2. توزیع جرم همگن

$A \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right.$ Center of mass : cm مرکز جرم اجسام گسسته

$$\begin{cases} x_{cm} = \dfrac{\sum^{n} m_i x_i}{\sum m_i} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \\ y_{cm} = \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \\ z_{cm} = \dfrac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \end{cases}$$

مثال :

$m_1 = 1kg$ $\boxed{1kg}$ $\boxed{2kg}$ $\boxed{3000gr}$ $\boxed{1200\,gr}$

$\left| \begin{matrix} x = 4 \\ y\ 5 \end{matrix} \right.$ $\quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \left| \begin{matrix} -8 \\ 12 \end{matrix} \right.$ $\quad \left| \begin{matrix} 2 \\ -10 \end{matrix} \right.$ $\quad \left| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right.$

$$x_{cm} = \frac{(1 \times 4) + (2 \times -8) + (3 \times 2) + (1.2 \times 0)}{1 + 2 + 3 + 1.2} = \frac{4 - 16 + 6 + 0}{7.2} = \frac{-6}{7.2} = 0.83$$

$$y_{cm} = \frac{(1 \times 5) + (2 \times 12) + (3 \times -10) + (1.2 \times -1)}{7.2} = \frac{5 + 24 - 30 - 1.2}{7.2} = \frac{-2.2}{7.2} = 0.305$$

حرکت دورانی با سرعت زاویه‌ای متغیر - شتاب زاویه‌ای ثابت

مکان زاویه‌ای لحظه‌ای — شتاب زاویه‌ای — امگا

$$* \; \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \longrightarrow \text{rad}$$ رادیان

معادله مکان زاویه‌ای - زمان — سرعت زاویه‌ای اولیه — مکان زاویه‌ای اولیه

* کمیت متغیر

سرعت لحظه‌ای $\overset{*}{\omega} = \frac{d\theta}{dt} = \alpha t + \omega_0 \longrightarrow \frac{rd}{s}$

سرعت زاویه‌ای متوسط $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \longrightarrow$ فقط برای این نوع حرکت. $\frac{rad}{s}$

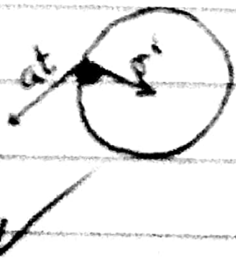
شتاب زاویه‌ای ثابت لحظه‌ای $\alpha = \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad \frac{rad}{s^2}$

رابطه مستقل از زمان $= \omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\alpha \underbrace{\Delta\theta}_{\theta_2 - \theta_1}$

$* \; v = r\omega$ ✓

$* \; a_r = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$ ✓

شتاب مرکزگرا



$* \; a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \quad \frac{m}{s^2}$ ✓

شتاب مماسی $= a_t = r\alpha$ ✓

مماسی

$n = \frac{t}{T}$

جسمی با شتاب زاویه ای ثابت در مدت ۳ دقیقه از ۳۰۰ دور بر دقیقه به ۱۵۰۰ دور بر دقیقه می رسد. اگر مکان زاویه ای اولیه جسم برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد و قطر دوران 2m باشد مطلوب است:

$\Delta t = 3\min = 3 \times 60 = 180$

$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

$n = \frac{t}{T}$ یا $T = \frac{t}{n} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow T_0 = \frac{t_0}{n}$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow T_1 = \frac{t_1}{n}$

الف) معادله مکان زاویه ای زمان را برای جسم ؟

$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

$\Delta t = 3\min = 180\,s$

$300 \frac{\text{دور}}{\min} \longrightarrow 500 \frac{\text{دور}}{\min}$

$$\begin{cases} \omega_0 = 2\pi f_0 \Rightarrow 2\pi(5) = 30 \frac{rd}{s} \checkmark \\ f_0 = \frac{n}{t} = \frac{300}{1 \times 60} = 5 \end{cases}$$

$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

$D = 2m \Rightarrow r = \frac{D}{2} = 1m$

$$\begin{cases} \omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow 2\pi(25) = 150 \frac{rad}{s} \checkmark \\ f_1 = \frac{n}{t} = \frac{1500}{60} = 25 \end{cases}$$

از این سوال ۳ دقیقه ۳ دور

۱ دقیقه ۱۸۰ در نتیجه α می شود ۶۰

$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{150 - 30}{180} = \frac{120}{180} = \frac{2}{3} \frac{rad}{s^2} \checkmark$

دو رسم (θ)

$\theta = t^2 + 30t + \frac{\pi}{4}$

$\theta = \frac{1}{\cancel{2}}(\frac{\cancel{2}}{3})t^2 + 30t + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \cancel{\frac{1}{3}}t^2 + 30t + \frac{\pi}{4}$

ب) سرعت زاویه ای جسم در لحظه $t = 3$ چند رادیان بر ثانیه است؟

$t = 3 \longrightarrow \omega_0 = ?$

$\omega = \alpha t + \omega_0$

مشتق از (θ)

$\omega = \frac{2}{3}t + 30$

$\omega_3 = \frac{2}{\cancel{3}}(\cancel{3}) + 30 = 32 \frac{rad}{s}$

ج) شتاب زاویه ای متوسط جسم از ۰ تا ۲ ثانیه چند rad بر مجذور ثانیه است؟

$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_0}{2 - 0}$ *

$\bar{\alpha} = \alpha = \frac{2}{3}$

TANDIS

د) سرعت خطی جسم در لحظه $t=3s$ چند $\frac{m}{s}$ است؟

روش حل ۱

$$v = r\omega_3 \Longrightarrow 1\times 32 = 32\,\frac{m}{s}$$

هـ) شتاب شعاعی و شتاب مماسی در لحظه $t=3$ را محاسبه کنید:

$$a_r = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = 1\times(32)^2 = 1024\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_t = r\alpha = 1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\,\frac{m}{s^2}$$

شتاب کل چند $\frac{m}{s^2}$ است؟

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(1024)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

= حرکت با شتاب زاویه‌ای متغیر ـ سرعت زاویه‌ای متغیر

اول

* $\theta = f(t)$ — به تابع صفحه 13 است

* لحظه‌ای $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

* $v = r\omega$

* ـ متغیر

* متوسط $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

لحظه‌ای $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$$a_t = r\alpha$$

متوسط $\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

Scanned by CamScanner

با توجه به رابطه $\theta = t^3 - 2t^2 + t - \pi$ به پرسش های زیر پاسخ دهید:

الف) $\theta_0 = ?$

ب) $\omega_0 = ?$

ج) $\theta_2 = ?$

د) $\bar{\omega} = ?$ $t = 0$ تا 2

ه) $\bar{\alpha} = ?$ $t = 0$ تا 2

و) $\alpha = ?$ $t = 2$

الف) $\theta_0 =$ عدد ثابت $= -\pi$

در معادله مکان زاویه ای - زمان یا در معادله t را معادل صفر قرار دهید مقدار θ_0 بدست آورید.

ب) $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $\omega = 3t^2 - 4t + 1$

ضریب t در معادله مکان زاویه ای - زمان برابر با ω_0 است یا معادله سرعت زاویه ای لحظه ای را بدست آورید عدد ثابت در این رابطه ω_0 است.

ج) $\theta_2 = 2^3 - 2(2)^2 + 2 - \pi = 8 - 8 + 2 - \pi = \cancel{6}\,2 - \pi$

$\theta = t^3 - 2t^2 + t - \pi$

د) $\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_0}{2 - 0} = \frac{2 - \pi - (-\pi)}{2} = 1$ ر/s

ه) $\omega_2 = 3(2)^2 - 4(2) + 1 \Rightarrow 12 - 8 + 1 = 5$

$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{2 - 0} = \frac{5 - 1}{2} = 2$ ر/s^2

و) $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 6t - 4$

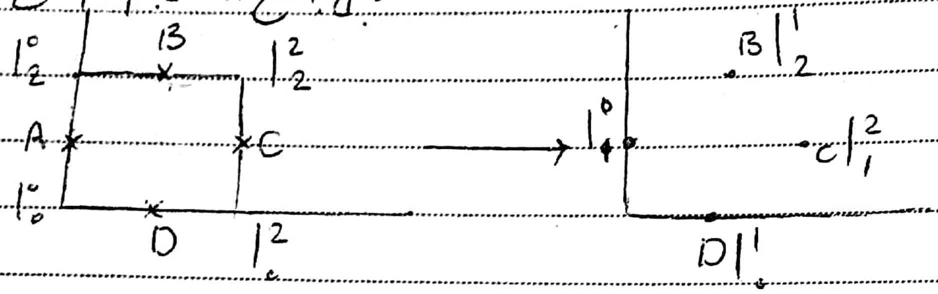
$\alpha_2 = 6(2) - 4 = 8$ ر/s^2

جلسه 21 . 2 . 95

$m_A = m_B = m_C = m_D = m$

مربعی به ضلع 2 و جرم 2m تمام اضلاع برابر است

مرکز جرم اجرام پیوسته



$X_B = \frac{0+2}{2} = 1$ $\qquad$ $X_A = \frac{0+0}{2} = 0$

$Y_A = \frac{0+2}{2} = 1$ $\qquad$ $Y_B = \frac{2+2}{2} = 2$

$* \; x = \frac{x_A + x_B}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{y_A + y_B}{2}$

$X_{C.M} = \frac{m(x_A + x_B + x_C + x_D)}{m+m+m+m} = \frac{\cancel{m}(0+1+2+1)}{4\cancel{m}} = \frac{4}{4} = 1$

$Y_{C.M} = \frac{m(y_A + y_B + y_C + y_D)}{4m} = \frac{1+2+1+0}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$C.M \Big|_{1}^{1}$

مثال های فصل ۹ حل شود.

نکته: $\text{تعداد دورها} = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi}$ ، $\Delta\theta \to$ رادیان

نکته: $\omega = \dfrac{2\pi n}{t}$ ، $n \to$ تعداد دورها ، $t \to$ مدت زمان

انرژی جنبشی دورانی

مانند انتقالی نیک

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

هنگامی که چند جسم در حال دوران داریم

$$\frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \dots$$

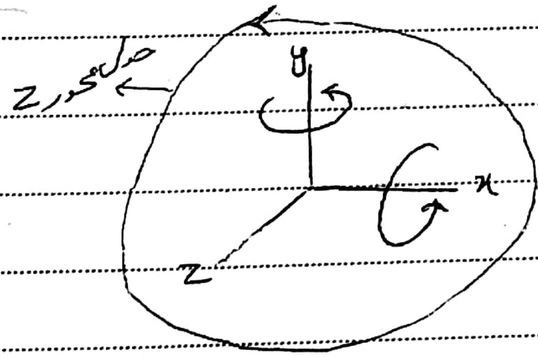
$$\underbrace{I}_{\text{ممان اینرسی ـ لختی دورانی ، گشتاور لختی ، گشتاور ماند}} = mr^2 \longrightarrow \underbrace{K}_{\text{انرژی جنبشی دورانی}} = \frac{1}{2}\underbrace{I}_{mr^2}\omega^2$$

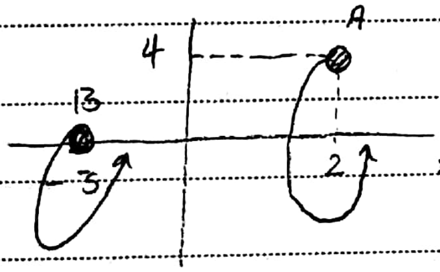
گشتاور لختی برای اجسام گسسته (سیستم ذرات)

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$$

m_i : جرم هر جسم

r_i : فاصله هر جسم از محور دورانی





با توجه به شکل مقابل اینرسی سیستم حول محور x ها را بدست آورید.

$m_A = 1\,Kg$

$m_B = 2\,Kg$

$r_A = 4$

$r_B =$

$$I = \sum_{i=1}^{2} m_i r_i^2 = m_A r_A^2 + m_B r_B^2$$

r_A : فاصله جسم A از محور دوران (x)

r_B : فاصله جسم B از محور دوران

$$= 1(4)^2 + 2(0)^2$$

$$= 16\ kg\,m^2$$

Scanned by CamScanner

ـ ممان اینرسی اجسام مختلف ص 228 حفظ نمائیم.

قضیه محورهای موازی : ممان اینرسی جسم حول هر محوری که با محوری که از مرکز جرم می گذرد موازی باشد و فاصله میان دو محور d باشد از رابطه زیر بدست می آید :

$$\underbrace{I}_{kg \cdot m^2} = I_{c.m} + \overset{\text{جرم}}{m} d^2$$

d : فاصله محور موازی با محوری که از مرکز جرم می گذرد

مثال : کره ای توپری به جرم 5 kg و قطر 10 cm مفروض است. ممان اینرسی کره حول محوری که از لبه کره می گذرد چند کیلوگرم مترمربع است؟

کره توپر $I_{cm} = \frac{2}{5} m R^2$

$d = \frac{10}{2} = \frac{5}{100} = 0.05$

$I_{cm} = \frac{2}{5} \times 5 \times (0.05)^2 = 5 \times 10^{-3}$

$$I = \underbrace{5 \times 10^{-3}}_{I_{cm}} + \underbrace{5}_{m} \times \underbrace{(0.05)^2}_{d^2} = 0.017$$

تعادل اجسام صلب (موقعیت ذرات جسم نسبت به هم تغییر نمی‌کند). برای برقراری تعادل کل می‌بایست تعادل های زیر برقرار باشند.

1- تعادل استاتیکی: برآیند نیروهای وارد بر جسم ۰ باشد.

$$\sum \vec{F} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

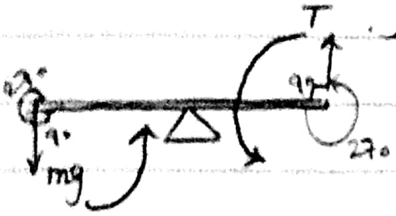
2- تعادل دینامیکی:

$$\sum \tau = 0 \longrightarrow \begin{cases} \sum \tau_x = 0 \\ \sum \tau_y = 0 \\ \sum \tau_z = 0 \end{cases}$$

گشتاورهای پادساعتگرد زاویه های کردن سو را نشان می دهند.

گشتاورهای ساعتگرد زاویه های لعن سو را نشان می دهند.

* گشتاور (جهت) با زاویه کوچکتر تعیین می شود.



گشتاور نیرو و شتاب زاویه ای.

$$\underbrace{\tau}_{\text{گشتاور نیرو}} = \underbrace{I}_{\text{لختی دورانی (گشتاور ماند)}}\ \underbrace{\alpha}_{\text{شتاب زاویه ای}}$$

$$\sum \vec{\tau} = I\alpha$$

تفاوت کار و گشتاور در میان عملیات ریاضی مربوط به بردار می باشد که کار کمیتی نرده ای و گشتاور کمیتی برداری است.

اثبات واحد τ :

rad بدون بعد است یا تاثیری ندارد.

$\tau = r\times F$ $\qquad I = mr^2$ $\qquad \tau = kg.m^2\times\frac{rad}{s^2} \Rightarrow kg.\underbrace{m}_{m}\times\underbrace{\frac{m}{s^2}}_{a=\alpha}$

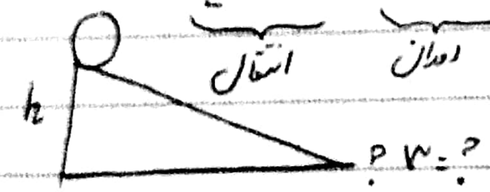
نتیجه $= \underbrace{m\times a}_{F}\times r \Rightarrow N.m$

مثال 3، 4، 5، 6، 7 حل شود.

انرژی جنبشی اجسام صلب :

$$\underline{E_1 = E_2}$$
$$U = K$$

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{انتقال}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{c.m}\,\omega^2}_{\text{دوران}} \qquad I = \frac{2}{5}mr^2$$



$$\boxed{r\omega = v}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\times\omega^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}\times R^2\times\omega^2$$

$$\Rightarrow v = r\omega \to \omega = \frac{v}{r}$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2$$

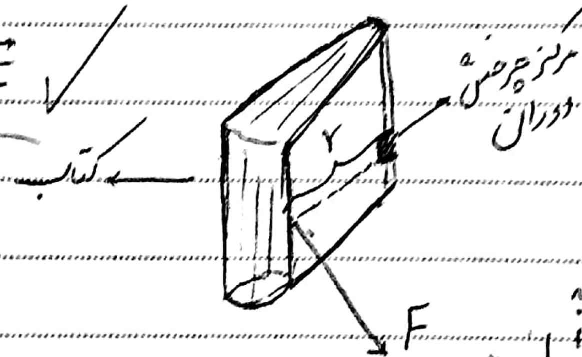
$$gh = \frac{7}{10}v^2$$

همین مسئله را تا کره توخالی استوانه حلقه محاسبه کنید.

$$v^2 = \frac{gh}{\frac{7}{10}} = \frac{10gh}{7} \qquad v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

گشتاور نیرو : موجب تغییر در حرکت دورانی می شود و کمیتی فیزیکی است

$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$



گشتاور به 3 عامل بستگی دارد.

- F
- فاصله از محور دوران r
- زاویه میان θ ، r و F

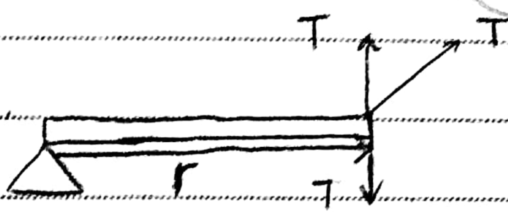
$$|\vec{\tau}| = rF\sin\theta$$

جهت = قانون دست راست

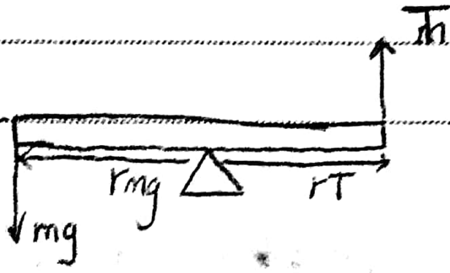
$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\tau_{\odot} = |r \times F| = rF\sin\theta$$

برون



بردار r :



$\tau_T = \odot$

$\tau_{mg} =$