

ریاضی عمومی

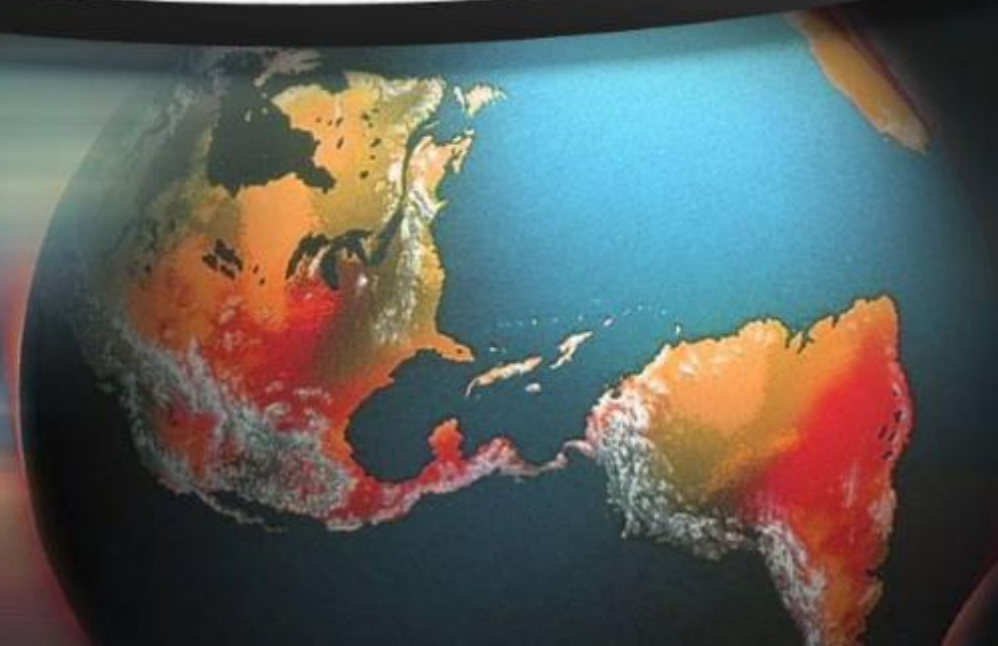
رشته هنر

مدرس و مولف جزوه:

دکتر نوشاد

منبع:

ریاضی مقدماتی، آقای گرایه چیان



فصل پنجم:

* نسبت های مثلثاتی

* روابط بین نسبت های مثلثاتی

* معادلات مثلثاتی

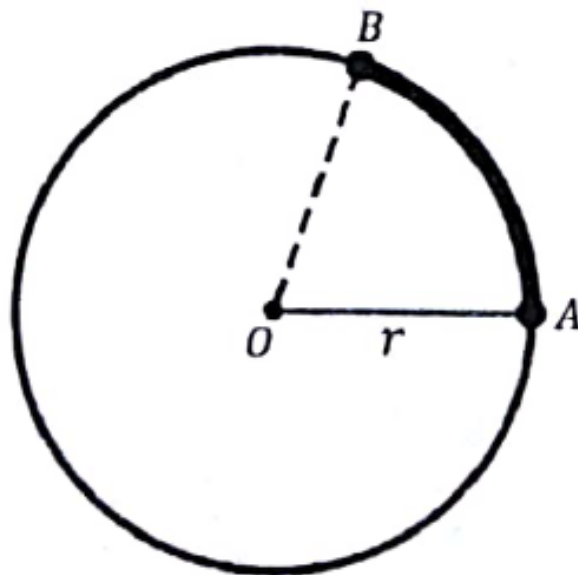
جلسه دهم: نسبت های مثلثاتی

زاویه و واحدهای اندازه گیری آن

درجه: یک دایره دلخواه را در نظر بگیرید. اگر محیط این دایره را 360 قسمت کنید، زاویه مرکزی مقابل هر قسمت را یک درجه می گویند. به عبارت دیگر زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول $\frac{1}{360}$ محیط دایره، یک درجه است. برای نمایش درجه از یک دایره کوچک که در توان یک عدد قرار دارد استفاده می کنند. بنابراین زاویه نیم صفحه 180° و زاویه تمام صفحه 360° می باشند.

گراد: یک دایره دلخواه را در نظر بگیرید. اگر محیط این دایره را ۴۰۰ قسمت کنید، زاویه مرکزی مقابل هر قسمت را یک گراد می گویند. به عبارت دیگر زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول $\frac{1}{400}$ محیط دایره، یک گراد است. برای نمایش گراد از حروف gr استفاده می کنند. بنابراین زاویه نیم صفحه 200 gr و زاویه تمام صفحه 400 gr می باشند.

رادیان: دایره‌ای به شعاع دلخواه r را در نظر بگیرید. بر روی محیط این دایره کمانی به اندازه r جدا کنید. زاویه مرکزی مقابل این کمان را یک رادیان می‌گویند. برای نمایش رادیان از حروف rad استفاده می‌کنند.



$$\widehat{AB} = OA = r$$

$$\angle AOB = 1 \text{ rad}$$

تبدیل واحدهای اندازه گیری

تبدیل واحدهای اندازه گیری به یکدیگر: اگر اندازه زاویه را برحسب درجه با D ، برحسب گراد را با G و برحسب رادیان را با R نمایش دهیم، به کمک تناسب برای تبدیل واحدها به یکدیگر فرمول زیر را می توان نوشت:

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

مثال ۱: اندازۀ زاویه‌های $\frac{\pi}{4} rad$ ، $\frac{2\pi}{3} rad$ و $1 rad$ را بر حسب درجه محاسبه کنید.

حل : با توجه به اینکه π رادیان برابر 180° می‌باشد، داریم:

$$\frac{\pi}{4} rad = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ , \quad \frac{2\pi}{3} rad = \frac{2(180^\circ)}{3} = 120^\circ$$

برای محاسبه $1 rad$ بر حسب درجه از تناسب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \xrightarrow{R=1} \frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \rightarrow D = \frac{180}{\pi} \cong \frac{180}{3.14} \cong 57.3 \rightarrow 1 rad \cong 57.3^\circ$$

مثال ۲: اندازه زاویه های 3° و 45° را برحسب رادیان محاسبه کنید.

حل : برای محاسبه زاویه ها برحسب درجه از تناسب استفاده می کنیم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \xrightarrow{D=3} \frac{3}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{3\pi}{180} = \frac{\pi}{60} \rightarrow 3^\circ = \frac{\pi}{60} rad$$

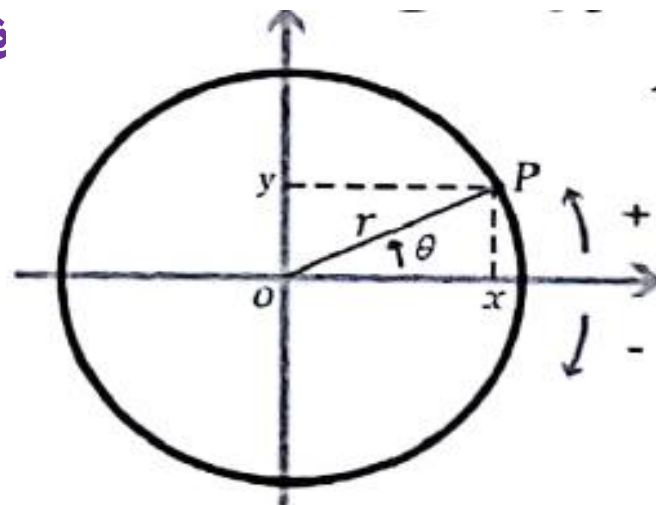
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \xrightarrow{D=45} \frac{45}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4} rad$$

مختصات روی دایره مثلثاتی

مقدمه برای آشنایی با نسبت‌های مثلثاتی: دستگاه مختصات دکارتی را در نظر بگیرید، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم کنید، می‌خواهیم بر روی محیط این دایره حرکت کنیم، مبدا حرکت را نقطه $(r, 0)$ در نظر می‌گیریم. حرکت در جهت عقربه‌های ساعت را جهت منفی و خلاف آن را جهت مثبت فرض می‌کنیم. موقعیت خود را بر روی این دایره، به دو روش می‌توان گزارش کرد:

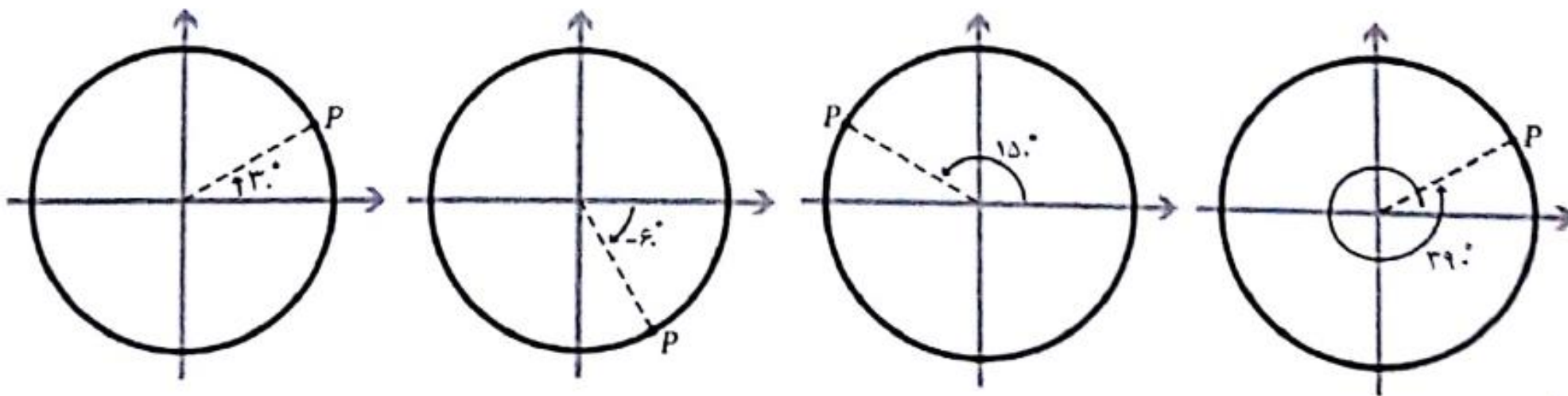
روش اول: بر حسب مختصات دکارتی یعنی $P(x, y)$.

روش دوم: بر حسب شعاع دایره و زاویه طی شده یعنی $P(r, \theta)$ ^(۱).

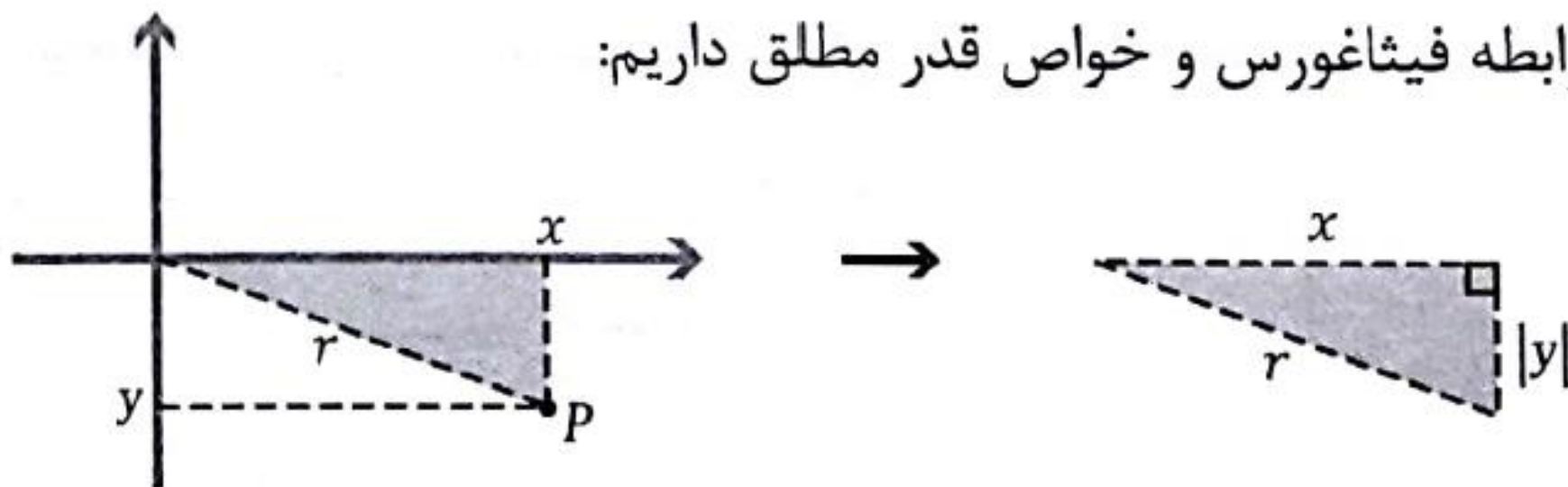


مثال ۳: هرگاه $r = ۲$ و θ یکی از زاویه‌های ۳۰° ، -۶۰° ، ۱۵۰° و ۳۹۰° باشد،

موقعیت نقطه $P(r, \theta)$ بر روی دایره‌های زیر مشخص شده است.

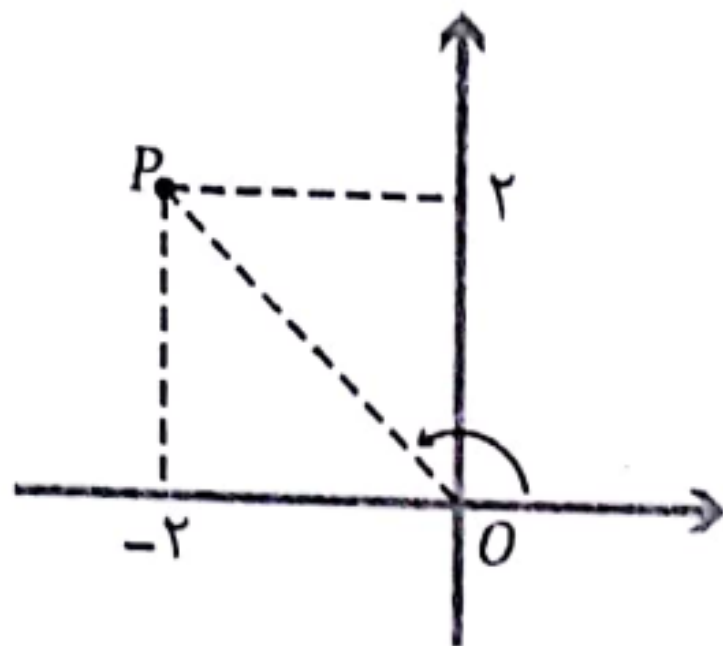


نکته: نقطه $P(x, y)$ در هر جای صفحه که باشد، برای به دست آوردن r ، از رابطه $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ استفاده می شود. به عنوان نمونه اگر نقطه P در ناحیه چهارم باشد، به کمک رابطه فیثاغورس و خواص قدر مطلق داریم:



$$x^2 + |y|^2 = r^2 \rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \xrightarrow{r>0} r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال ۴: هرگاه مختصات نقطه P در دستگاه دکارتی $(-2, 2)$ باشد، مختصات این نقطه را به کمک r و θ نشان دهید.



حل: به کمک نکته قبل می توان r را به دست آورد:

$$r = OP = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

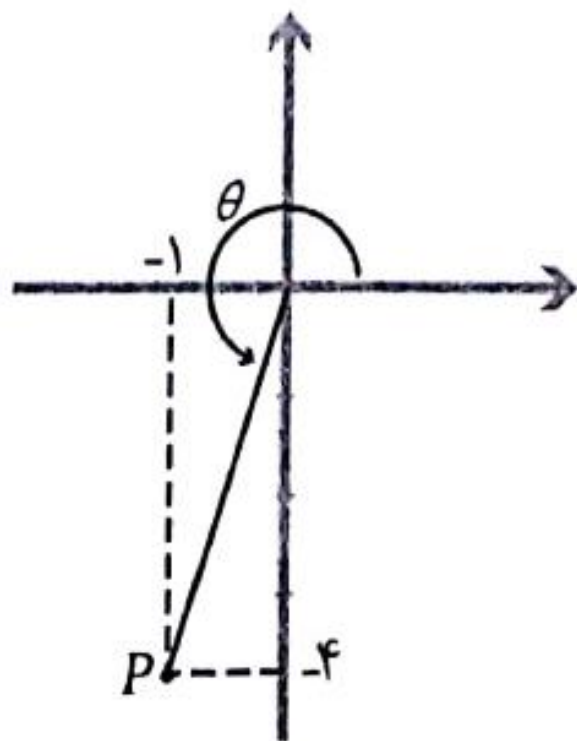
و با توجه به شکل داریم: $\theta = 135^\circ$ بنابراین

مختصات نقطه P برابر $(2\sqrt{2}, 135^\circ)$ می باشد.

نسبت های مثلثاتی: برای اینکه دو نمایش مختلف مختصات نقطه P را بتوانند به یکدیگر تبدیل کنند، مفاهیم جدیدی را به نام نسبت های مثلثاتی زاویه θ به صورت زیر تعریف کرده اند:

$$\begin{aligned} ۱) \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{سینوس}) & ۲) \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{کسینوس}) \\ ۳) \tan \theta &= \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \quad (\text{تانژانت}) & ۴) \cot \theta &= \frac{x}{y} \quad (y \neq 0) \quad (\text{کوتانژانت}) \end{aligned}$$

مثال ۵: با توجه به شکل زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.



حل: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

مثال ۶: در شکل زیر نیم خط $y = -2x$ را با شرط $x \leq 0$ مشاهده می کنید. این نیم خط

با جهت مثبت محور x ها زاویه θ می سازد، نسبت های مثلثاتی این زاویه را به دست آورید.^(۱)

حل: نقطه $P(-1, 2)$ را بر روی این نیم خط انتخاب می کنیم، خواهیم داشت:

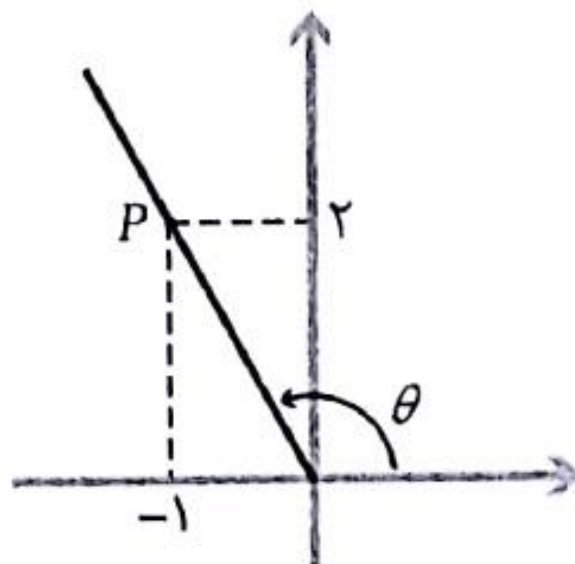
$$r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-1}{2}$$



مثال ۷: نسبت های مثلثاتی زاویه ۹۰° را حساب کنید.

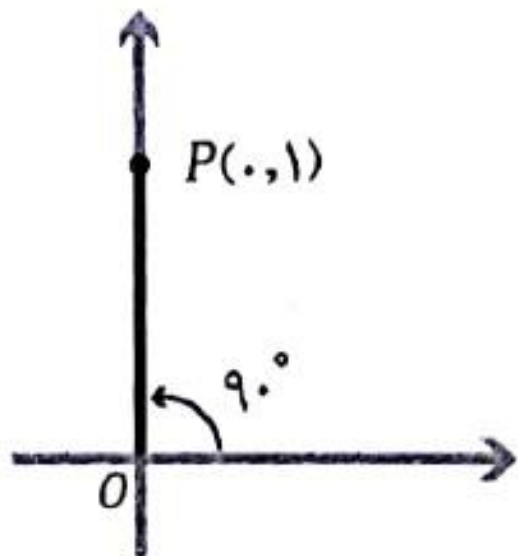
حل: برای این منظور نقطه $P(۰, ۱)$ را بر روی محور oy انتخاب می کنیم، داریم:

$$r = \sqrt{۰^۲ + ۱^۲} = ۱ \rightarrow \sin ۹۰^\circ = \frac{۱}{۱} = ۱$$

$$\cos ۹۰^\circ = \frac{۰}{۱} = ۰$$

$$\tan ۹۰^\circ = \frac{۱}{۰} \quad (\text{تعریف نشده})$$

$$\cot ۹۰^\circ = \frac{۰}{۱} = ۰$$

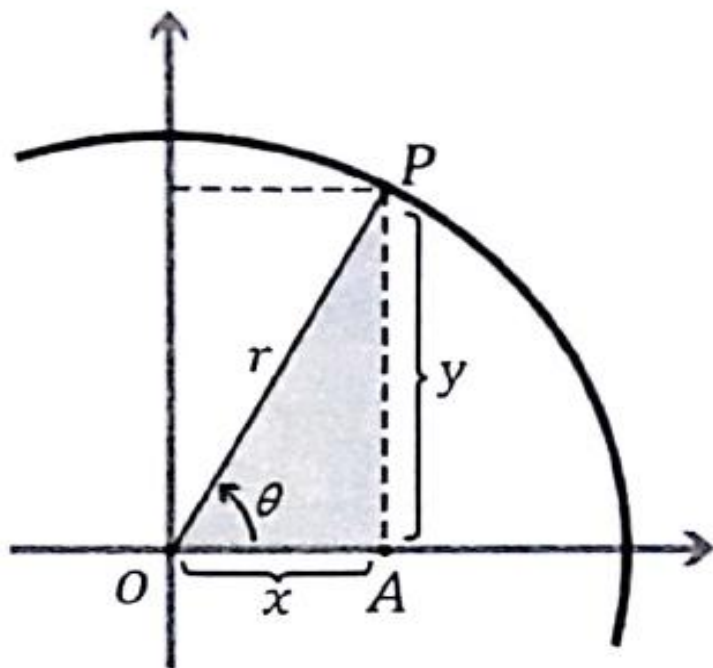


نتیجه: هرگاه θ یکی از زاویه‌های 0° ، 90° ، 180° ، 270° و 360° باشد، مشابه مثال قبل می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آنها را محاسبه کرد. این نسبت‌ها در جدول زیر نشان داده شده است.

θ نسبت	$0^\circ, 360^\circ$	90°	180°	270°
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰
$\tan \theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده
$\cot \theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰

محاسبه نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده:

فرض کنید θ یک زاویه حاده (تند) یعنی $0 < \theta < 90$ و $P(x, y)$ در انتهای کمان مقابل به این زاویه باشد. نسبت های مثلثاتی زاویه θ را با توجه به مثلث قائم الزاویه OAP ، به صورت ساده زیر، می توان بیان کرد:



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{AP}{OP} = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}}$$

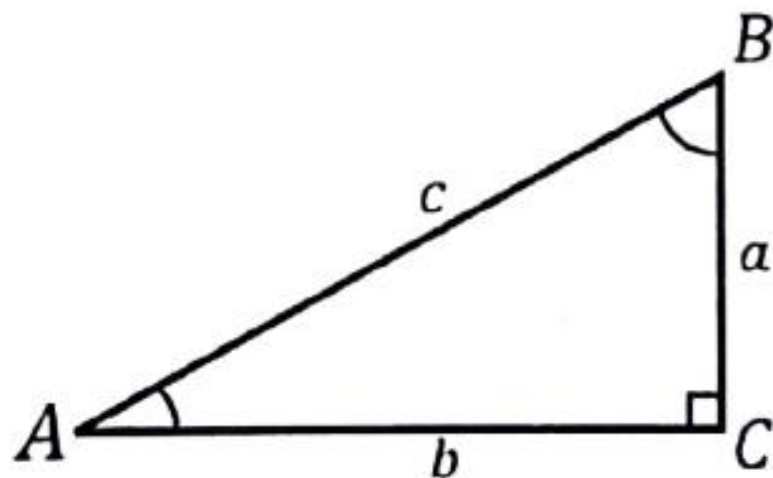
$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{OA}{OP} = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{AP}{OA} = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{OA}{AP} = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{ضلع مقابل } \theta}$$

مثال ۸:

در شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های A و B مشخص شده است.



$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\tan B = \frac{b}{a}$$

$$\cot A = \frac{b}{a}$$

$$\cot B = \frac{a}{b}$$

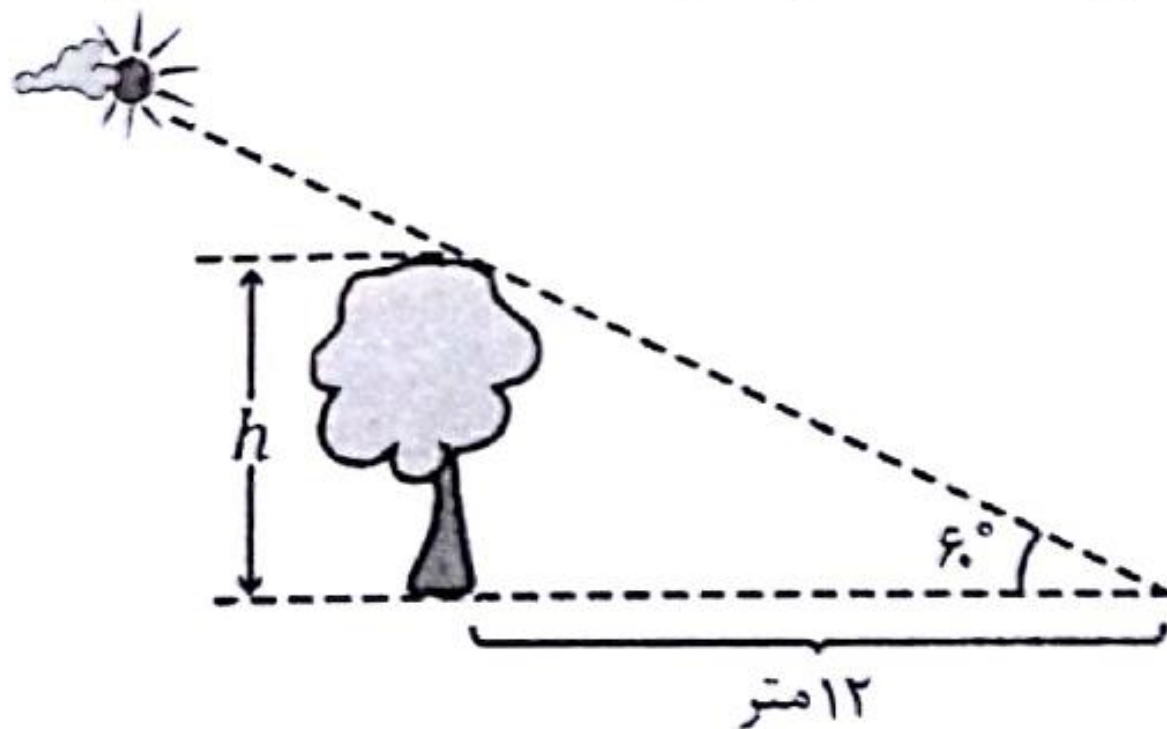
مثال ۹: در لحظه‌ای که زاویه تابش نور خورشید به زمین 60° است، سایه درخت

۱۲ متر می‌باشد. ارتفاع درخت را بیابید.

حل: مطابق شکل مقابل داریم:

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{12}$$

$$\rightarrow h = 12\sqrt{3} \cong 20.78 \text{ m}$$

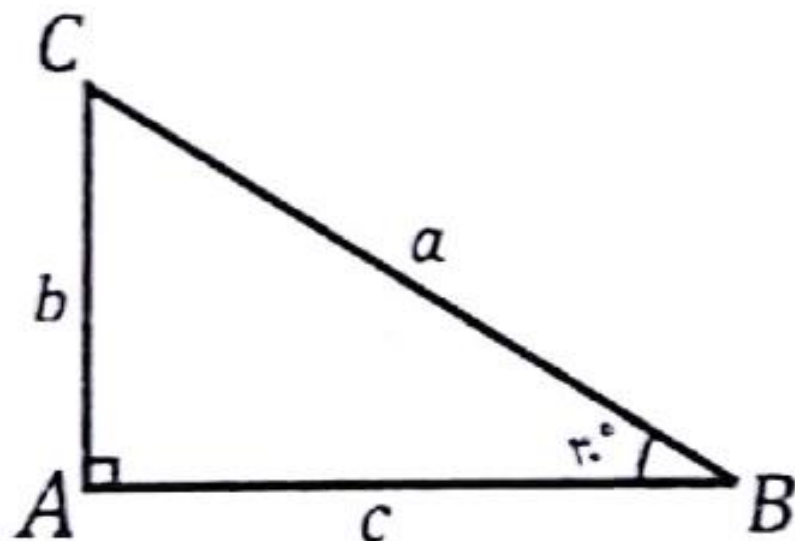


مثال ۰۱: مثلث ABC در رأس A قائمه است و داریم: $\angle B = 30^\circ$ و $a = 4$ اندازه دو

ضلع دیگر را به دست آورید.

$$\text{حل: } \sin 30^\circ = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b}{4} \rightarrow b = 2$$

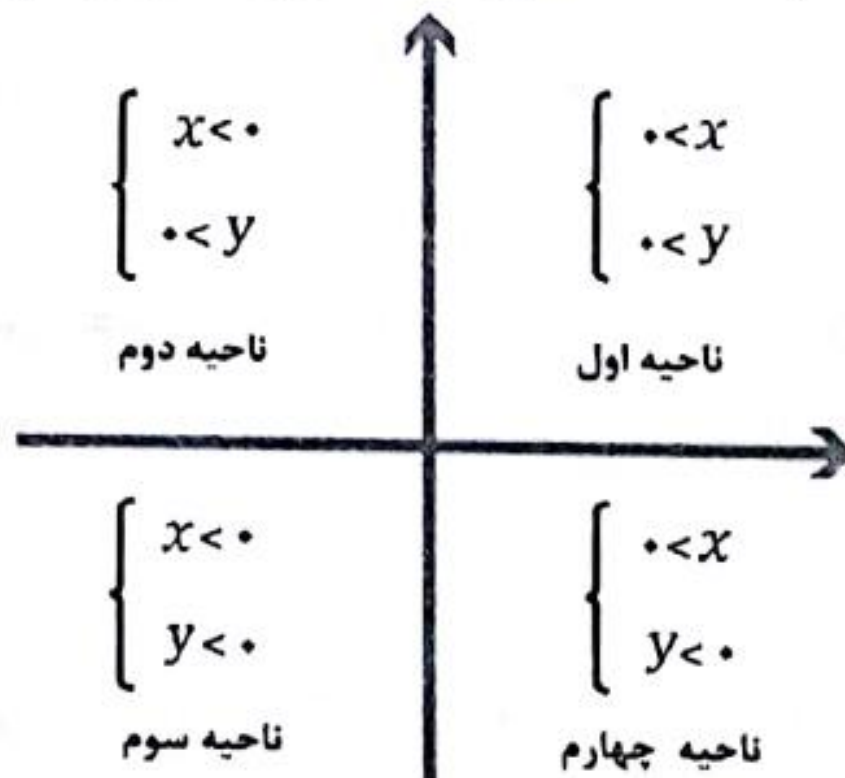
$$\cos 30^\circ = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{4} \rightarrow c = 2\sqrt{3}$$



به کمک مطالب فوق، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° ، 45° و 60° را می‌توان محاسبه کرد^(۱). اندازه این نسبت‌های مثلثاتی را در جدول زیر آورده‌ایم:

θ نسبت	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

نکته: هرگاه انتهای زاویه θ بر روی محورهای مختصات نباشد، علامت نسبت‌های مثلثاتی این زاویه، با توجه به علامت‌های x ، y و r در جدول زیر مشخص شده است.



θ نسبت	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	$180^\circ < \theta < 270^\circ$	$270^\circ < \theta < 360^\circ$
$\sin \theta = \frac{y}{r}$	+	+	-	-
$\cos \theta = \frac{x}{r}$	+	-	-	+
$\tan \theta = \frac{y}{x}$	+	-	+	-
$\cot \theta = \frac{x}{y}$	+	-	+	-

مثال ۱۱): هرگاه $\sin \theta = \frac{2}{5}$ و انتهای کمان در ناحیه دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه $\sin \theta = \frac{2}{5}$ ، پس می‌توان فرض کرد $y = 2$ و $r = 5$. برای به دست آوردن سایر نسبت‌های مثلثاتی باید مقدار x را محاسبه کنیم. چون علامت x در ناحیه دوم منفی است، پس داریم:

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow x = -\sqrt{r^2 - y^2} \rightarrow x = -\sqrt{5^2 - 2^2} = -\sqrt{21}$$
$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{21}}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{-\sqrt{21}}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{21}}{2}$$

مثال ۱۲: هرگاه $\tan \theta = \frac{3}{4}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

حل: چون در ناحیه سوم علامتهای x و y منفی می باشند، پس می توان فرض کرد:

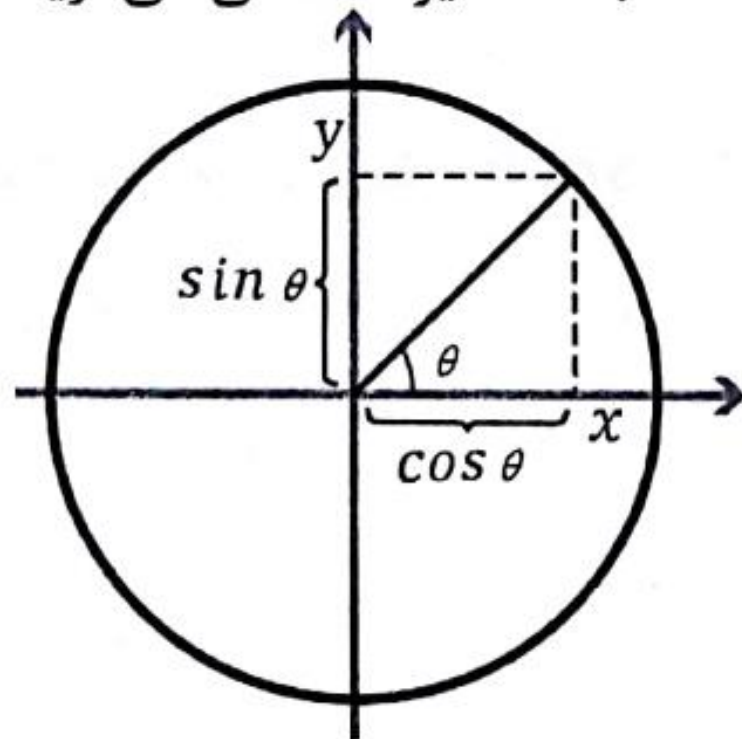
$$\tan \theta = \frac{3}{4} = \frac{-3}{-4} \rightarrow (y = -3 \text{ و } x = -4)$$

$$\rightarrow r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

دایره و معورهای مثلثاتی

تعریف: به دایره‌ای جهت‌دار که شعاع آن یک، مرکز آن مبدا مختصات و جهت حرکت بر روی محیط آن، بر خلاف عقربه‌های ساعت باشد، دایره مثلثاتی می‌گویند.
در این حالت داریم:



$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

لذا محور x ها را محور کسینوسها و محور y ها را، محور سینوسها می نامند. با توجه به تعریف دو نسبت سینوس و کسینوس و دایره مثلثاتی، برای هر زاویه θ داریم:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

مثال ۱۳: حداقل و حداکثر عبارات زیر، بر اساس تعریف توابع مثلثاتی مشخص شده است.

۱) $3 - 2\cos \theta$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \xrightarrow{\times(-2)} 2 \geq -2\cos \theta \geq -2 \xrightarrow{+3} 1 \leq 3 - 2\cos \theta \leq 5$$

تمرین

۱-) اندازه زاویه های زیر برحسب رادیان است، آنها را برحسب درجه بیان کنید.

- ۱) $\frac{\pi}{15}$ ۲) $\frac{7\pi}{6}$ ۳) ۲ ۴) -3π ۵) $\frac{7\pi}{2}$

۲-) اندازه زاویه های زیر برحسب درجه است، آنها را برحسب رادیان بیان کنید.

- ۱) 1° ۲) 15° ۳) 135° ۴) 240° ۵) 720°

۳-) هرگاه $\sin \theta \cot \theta < 0$ و $\cos \theta \tan \theta < 0$ ، انتهای کمان θ در کدام ناحیه است؟

۴- هرگاه $\sin \theta = \frac{-3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را محاسبه کنید.

۵- اگر $\tan \theta = \frac{-1}{3}$ و انتهای کمان θ در ناحیه دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را محاسبه کنید.

۶- حداقل و حداکثر هر یک از عبارات زیر را در صورت وجود به دست آورید^(۱).

۱) $2 + 5 \sin x$

۲) $2 - 3 \cos x$