

س. تالی

رایج عمومی ۲

حسب تنظیم

(هجری ۱۳۹۸، ۱۲، ۲۱)

در توابع یک متغیره، لایحه ترکیب توابع پیوسته، تابع پیوسته است.

یعنی اگر توابع دو متغیره و سه این قانون طی برقرار است، در تابع ترکیبی

این طبق آن است که هر تابع در تابع ترکیبی پیوسته است.

مثال: اگر $z = f(u, v)$ تابع پیوسته ای از u, v باشد و $w = g(z)$

باشد که آن تابع مرکب $w = g(f(u, v))$ پیوسته است، عنوان نمود

$$z = u - v$$

$$w(z) = e^z$$

تابع مرکب e^{u-v} که ترکیب توابع پیوسته

$z = f(u, v) = u - v$ و $w = g(z) = e^z$ است، تابع پیوسته می باشد.

مثال: هرتس آرشیف در بیولیم

$$f(x, y) = e^{-y} \quad , \quad f(x, y) = \ln(1 + x^2 y)$$

همچون هرتس آرشیف و هرتس آرشیف و هرتس آرشیف در آن نقطه برابر است

پس تابع $f(x, y)$ در هرتس آرشیف (x, y) بیولیم است.

آرشیف در بیولیم و هرتس آرشیف

آرشیف $f(x, y)$ هرتس آرشیف در (x, y) در آن نقطه بیولیم است (x, y)

نزدیک می شود به هرتس آرشیف در آن نقطه $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$

بیولیم است.

مثال: نشان هرتس آرشیف $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ و هرتس آرشیف (x, y) (x_0, y_0)

نزدیک می شود به هرتس آرشیف.

مثال: در آن نقطه $x \neq 0$ ، $y = kx^2$ تابع دارای مقدار ثابت برابر است

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \Big|_{y=kx^r} &= \frac{2x^r y}{x^r + y^r} \Big|_{y=kx^r} \\
 &= \frac{2x^r (kx^r)}{x^r + (kx^r)^r} \\
 &= \frac{2kx^r}{x^r + k^r x^r} = \frac{2kx^r}{x^r(1+k^r)} \\
 &= \frac{2k}{1+k^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx^r}} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[f(x,y) \Big|_{y=kx^r} \right] \\
 &= \frac{2k}{1+k^r}
 \end{aligned}$$

سایرین

این حدوی سیرا تفاوت تغییر خواهد کرد
نظا $y=x^2$ با سیرا

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= 1 \\
 (x,y) &\rightarrow (0,0)
 \end{aligned}$$

دار $y=0$ با سیرا

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= 0 \\
 (x,y) &\rightarrow (0,0)
 \end{aligned}$$

۳

سامان حد تابع f وجود دارد.

نکات جزئی:

وقتی نام تغییرها یک تابع به ضرب تغییر را ثابت داریم و نسبت این تغییر
شکل بگیریم آنوقت مشتق جزئی درست می‌آید.

تعریف: مشتق جزئی $f(x, y)$ نسبت به تغییر x در نقطه (x_0, y_0) عبارت
است از:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{d}{dx} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}\end{aligned}$$

در واقع می‌توان گفت:

شیب خطی $z = f(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) در صحنه $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$y = y_0$ عبارت است از مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه (x_0, y_0) .

به طور مشابه برای مشتق جزئی نسبت به y در نقطه (x_0, y_0) عبارت داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{d}{dy} f(x_0, y) \Big|_{y=y_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}\end{aligned}$$

مثال: مطلوب است مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(4, -5)$ برای

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^{-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{d}{dx} (x^2 + 3xy + y^{-1}) \\ &= 2x + 3y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(4, -5)} &= 2 \times 4 + 3 \times (-5) \\ &= 8 - 15 = -7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{d}{dy} (x^2 + 3xy + y^{-1}) \\ &= 3x + 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(4, -5)} = 3 \times 4 + 1 = 13$$

مثال فرض کنید $\frac{\partial f}{\partial y}$ مطلوب است. $f(x, y) = y \sin xy$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial (y \sin xy)}{\partial y} = \frac{\partial (y)}{\partial y} \sin xy + y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \sin xy \\ &= \sin xy + y \cdot \cos xy \cdot \frac{\partial}{\partial y} (xy) \\ &= \sin xy + xy \cos xy.\end{aligned}$$

مثال فرض کنید $\frac{\partial f}{\partial x}$ مطلوب است. $f(x, y) = \frac{xy}{y + \cos x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{xy}{y + \cos x} \right)}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left(\frac{xy}{y + \cos x} \right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}(xy)(y + \cos x) - xy \frac{d}{dx}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2}$$

$$= \frac{0(y + \cos x) - xy(-\sin x)}{(y + \cos x)^2}$$

$$= \frac{xy \sin x}{(y + \cos x)^2}$$

شکل مرتبه دوم

دسته اول: $f(x, y)$ در مرتبه دوم، در حقیقت شکل مرتبه دوم است
می‌کنیم این مشتقات را با علامت در بخش می‌نویسیم.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (4)$$

مثال: اگر $f(x, y) = x \cos y + y e^x$ در این صورت

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (\cos y + y e^x)$$

$$= -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + e^x$$

پس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-x \sin y + e^x) \\ = -\sin y + e^x.$$

کتاب در حالت کلی $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ هم برابرند و تساوی در مثال
ثباتی تعارضی است.

قضیه اولی:

اگر $f(x, y)$ در نقاط جزئی $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

در یک ناحیه باز (a, b) تعریف شود و همگی در آن نقاط
پیوسته باشند آنگاه

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

ریاضی عمومی ۲

@javadi-math2-91