

بسم الله الرحمن الرحيم

جلسه دوم

با توجه به درسهای قبل به حل چند مسئله می پردازیم

۱- یک تاس سالم را ۱۰۰۰ بار پرتاب می کنیم تا برای اولین بار عدد ۶ بیاید

الف- اگر A پیشامد مشاهده عدد ۶ و B پیشامد مشاهده عدد غیر ۶ باشد فضای نمونه و احتمال هر یک ساده را بیابید

ب- فرض کنید X شماره پرتابهای لازم برای مشاهده اولین ۶ باشد S_X را بیابید

ج- تابع احتمال و تابع توزیع X را بیابید و احتمال اینکه X مضرب ۳ باشد را بیابید

حل:

مشاهده وجه غیر شش B
مشاهده وجه شش A
چون تاس ۶ وجه دارد و یک وجه آن عدد ۶ است پس شانس اینکه وجه شش ظاهر شود $\frac{1}{6}$ است
و شانس اینکه شش ظاهر نشود $\frac{5}{6}$ است پس

$$P(\{A\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{BA\}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(\{BBA\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)$$

پس احتمال اینکه بار اول و دوم وجه شش ظاهر نشود و بار سوم وجه شش بیاید

X	۱	۲	۳	...
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}$	...

$$S_X = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

ب) S_X مجموعه ممکنه

ج)

X	۱	۲	۳	...
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}$	...

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} & x < n \end{cases}$$

$$P(X = \text{مضرب ۳ باشد}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{6} + \dots$$

$$S_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

سؤال: کدام یک از توابع زیری توان تابع احتمال یک متغیر تصادفی را می باشد چرا

$$P_x(x) = \frac{x}{15}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

x	0	1	2	3	4	5
$P(x=x)$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

شرط اول

$$\sum P(x=x) = 1 \quad 0 + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = 1$$

هر دو شرط تابع احتمال را دارد

ب) $P_x(x) = \frac{5-x^2}{6}, \quad x = 0, 1, 2, 3$

حل: $P_x(1) = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6}$ $P_x(2) = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6}$

$P_x(3) = \frac{5-9}{6} = -\frac{4}{6}$ این احتمال منفی است و امکان ندارد پس این یک تابع احتمال نیست

سؤال ۳: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر تعریف شده

$$P_x(x) = \begin{cases} Kx^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

مقدار K را تعیین کنید

و $P(|x| \leq 1)$ را بیابید

حل: $\int_{-1}^1 Kx^2 dx = 1 \Rightarrow \frac{Kx^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 1 \Rightarrow \frac{2K}{3} = 1 \Rightarrow K = \frac{3}{2}$

$P(|x| \leq 1) \Rightarrow P(-1 < x < 1) = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x^2 dx = 1$