

به تالی

ریاضی عمومی ۲

جمله چهارم

(جبرانی ۹۸، ۱۲، ۱۴)

فصل ۳: توابع چندتاییه، رشتات خونی

بسیار از توابع به صورت چندتاییه می باشند در این بخش توابعی که دارای
چندتاییه متغیر می باشند را تعریف می نمایم و در مورد ویژگی ها آن ها بحث می کنیم
توابع حقیقی با چندتاییه متغیر متغیر را با استفاده از حالت یک متغیره
تعریف می کنیم

تعریف: فرض کنید D مجموعه n تاییه ها اعداد حقیقیه به صورت
 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

باشد تابع حقیقی f روی D تابعه ای است که به هر عضو D

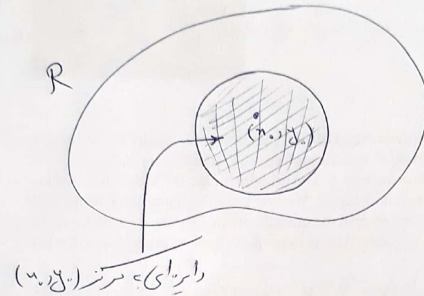
عدد حقیقیه بماند

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

است می دهد مجموعه D را به تعریف تابع f می باشد و مجموعه مقادیر
 w برد تابع f می باشد

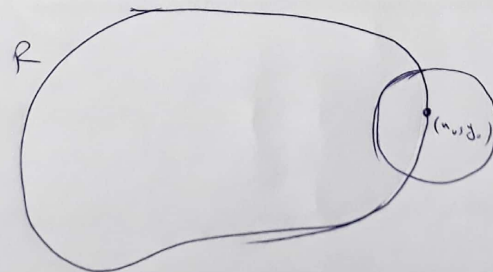
نقطه درونی و مرزی:

نقطه (x_0, y_0) در ناحیه R درصورتی که یک راس نقطه درونی R باشد اگر این نقطه مرکز دایره ای باشد که در آن دایره به طور کامل در R قرار داشته باشد.



همانگونه که در شکل مشاهده می شود چون دایره ای مرکز (x_0, y_0) کاملاً در ناحیه R واقع شده است پس نقطه (x_0, y_0) یک نقطه درونی ناحیه R است.

نقطه (x_0, y_0) از نقطه مرزی R گویند هرگاه هر دایره ای مرکز (x_0, y_0) با آن تقاطعی در داخل ناحیه R و تقاطعی خارج ناحیه R باشد.



همانطور که شاهد می‌کنیم، فرض از نقاط رابر، مرکز (۵، ۵)، داخل ناحیه R در بی بی خارج ناحیه R است پس نقطه (۵، ۵) یک نقطه مرزی است.

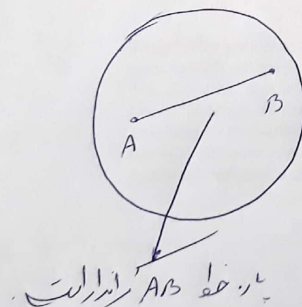
تقریباً ناحیه R باز است اگر چه نقاط آن، نقطه درونی باشد.

تقریباً ناحیه R بسته است اگر شامل همه نقاط مرزی خود باشد.

تقریباً ناحیه کراندار:

یک ناحیه در صفحه را کراندار می‌گویند اگر در آن برای هر مجموعه از نقاط مرزی آن، یک نقطه مرزی دیگر وجود داشته باشد که به آن کراندار می‌گویند.

مثال: پاره خط ها، سطح و در یک (رابر ها) مجموعه‌های کراندار در صفحه هستند.



مثال: خطوط، نیم صفحه ها و صفحه ها مجموعه‌های بی کران هستند چون بی کران است. اگر چه در داخل رابر ای قرار دارد.

تعریف: مجموعه نقاطی که ازای آن نقاط تابع $f(x, y)$ دارای مقداری ثابت
 چون $f(x, y) = c$ می باشد را منحنی تراز f می گویند.

مثال:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 9$$

تعریف: ازای (x, y) واقع در دامنه f ، مجموعه نقاطی چون $(x, y, f(x, y))$
 را نمودار تابع f می نامند. نمودار f را روی $z = f(x, y)$ نیز می نامند.

مثال: منحنی تراز تابع $z = x^2 - y^2$ را رسم کنید.

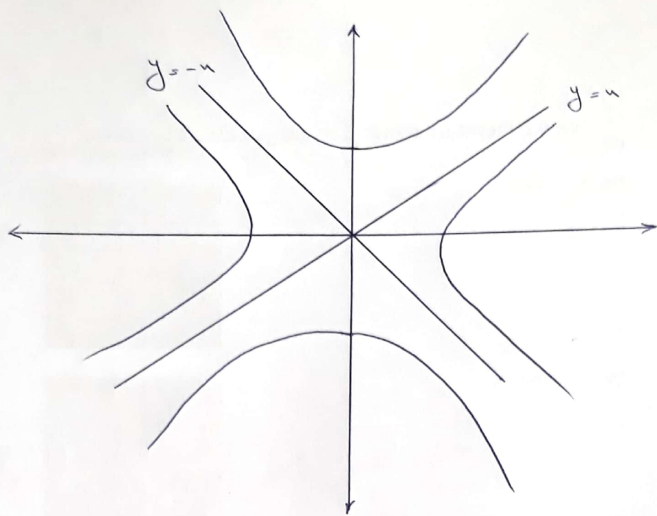
$$z = 0 \rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

$$z = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

$$z = 2 \rightarrow x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$$

$$z = -1 \rightarrow x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

$$z = -2 \rightarrow x^2 - y^2 = -2 \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$$



حد و پیوستگی

در این بخش حد و پیوستگی توابع چند متغیره را بررسی می‌کنیم
 تقریباً به روش زیر در $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ میل کند آن تابع $f(x, y)$ به
 حد L میل می‌نماید در زیریم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$$(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$$

هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ بتوانیم آن را پیدا کنیم که اگر (x,y) در دایره δ باشد و $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ باشد، آنگاه $|f(x,y) - L| < \epsilon$ خواهد بود.

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$$

خواص حدی توابع ۲ متغیره:
 حرکت راست به سمت

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad ; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

که نتوانش زیر برقرارند:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L + M$$

۱- قانون جمع

۲- قانون تفاضل

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) - g(x,y)] = L - M$$

۳- قانون ضرب

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) g(x,y)] = L \cdot M$$

۴- قانون ضرب ثابت

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} k f(x,y) = k \cdot L$$

۵- قانون خارج قسمت

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \quad , \quad M \neq 0$$

۲

مثال: حد توابع زیر را بدست آورید.

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x - xy + 3)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x^2y + 5xy - y^3)}$$

$$= \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

مثال: مطلوب است

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

حل: وقتی $(x,y) \rightarrow (0,0)$ آنگاه $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ به صفر میل می کند

بنابراین قانون خارج قسمت را نمی توان کار برد اما اگر صورت را مخرج

این کار کرد $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ضرب کنیم. که عبارتی بدست

می آید هم به حد یک می توان بدست آورد.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$= 0(0+0) = 0$$

بیرونی تابعی رو تعریف:

تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) بیرونی است اگر

۱. f در نقطه (x_0, y_0) تعریف شده باشد.

۲. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$ موجود باشد.

۳. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$