

①

بسم الله الرحمن الرحيم

درس آمار و احتمالات مهندسی

حیله اول

تعریف احتمال: احتمال وقوع یک پدیده به معنای شانس وقوع آن پدیده در انجام یک آزمایش تصادفی است. در هر حال احتمال عددی است بین صفر و یک

تعریف تابع احتمال: تابع احتمال تابعی از فضای نمونه S به داخل مجموعه اعداد حقیقی است و تابع احتمال عدد حقیقی احتمال را برگردانی نسبت می دهد که در اصل زیر صدق کند

احتمال هر پدیده $P(A) \geq 0$ $P(S) = 1$ احتمال کل فضا

برای سیاه های ناسازگار $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

اگر دو پدیده A و B ناسازگار باشند آنگاه $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ①

ولی در حالت کلی $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ②

③ $P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$

مثال: اگر سکه ای را ۳ بار پرتاب کنیم احتمال حداقل یک بار شیر را بیابید
احتمال اینکه هیچ شیری نیاید $P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$ $\Rightarrow P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$ $n(S) = 2^3 = 8$ تعداد کل حالتها

$P(A) = 1 - P(\{TTT\}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$S = \{HHH, HHT, \dots, TTT\}$ T سیاه خط H شیر

اگر A و B دو سیاه درخواه باشند $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

مثال: احتمال اینکه حسن در امتحان قبول شود $\frac{1}{4}$ و احتمال اینکه در درس ریاضی قبول شود $\frac{1}{3}$ است و احتمال اینکه هر دو درس را قبول کند $\frac{1}{6}$ است احتمال حداقل یکی را قبول شود چقدر است

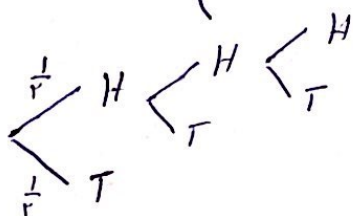
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5+4-2}{12} = \frac{7}{12}$$

متغیرهای تصادفی:

توابعی که روی فضای نمونه تعریف می‌شوند متغیر تصادفی می‌گویند
متغیر تصادفی تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی است

سوال: سکه ای که شانس مشاهده شیر در آن $\frac{1}{2}$ برابر خط است را n تعداد پرتاب می‌کنیم تا یک خط مشاهده کنیم پس توقف می‌کنیم اگر متغیر تصادفی M برابر تعداد پرتابهای لازم تا رسیدن به یک خط باشد احتمال اینکه حداقل m پرتاب لازم باشد را بیابید

$$S = \{T, TH, HHT, \dots\}$$



در واقع سکه را پرتاب می‌کنیم اگر روی سکه ظاهر شود مجدداً
آنها پرتاب می‌کنیم اگر پشت سکه ظاهر شود توقف می‌کنیم

H روی سکه

T پشت سکه

اگر سکه سالم باشد $\frac{1}{2}$ شانس روی سکه و $\frac{1}{2}$ شانس پشت سکه است و بی‌حیول سکه سالم نیست
و شانس بود و برابر پشت است
پس: صورت ←

S	T	HT	HHT	HHHT	...
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})$	

$$P(M \geq 4) = 1 - P(M < 4) = 1 - [P(M=1) + P(M=2) + P(M=3)]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{27 - (9 + 6 + 4)}{27} = \frac{1}{27}$$

تعریف تابع احتمال یا تابع احتمالی در حالت گسسته

تابع $P_X(x) = P(X=x)$ را یک تابع احتمال متغیر تصادفی X گسسته درگاه

۱- برای هر $x \in R$ داشته باشیم $P_X(x) \geq 0$

۲- $\sum_{x \in R} P_X(x) = 1$

(۳)

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و تغییر تصادفی X را برابر مجموع اعداد روی دو تاس مشاهده می‌کنیم.

الف- تابع احتمال X را بدست آورید.

ب- احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس حداقل ۴ شود.

ج- احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس بین ۶ و ۹ شود را بیابید.

حل:

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$$

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$$

$$X = \{2, 3, 4, \dots, 6\}$$

تعداد کل حالت‌های $6 \times 6 = 36$

	۲	۳	۴	۵	۶	۷
	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$			

$$P(X \leq 4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(6 < X < 9) = P(X=7) + P(X=8) =$$

$$\left. \begin{array}{l} 2+4=7, \quad 4+2=7 \\ 2+5=7, \quad 5+2=7 \\ 1+6=7, \quad 6+1=7 \end{array} \right\} \Rightarrow P(X=7) = \frac{6}{36}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3+4=7 \\ 3+5=8, \quad 5+3=8 \\ 2+6=8, \quad 6+2=8 \end{array} \right\} P(X=8) = \frac{5}{36}$$

$$P(6 < X < 9) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

۴

تابع جمعی (تابع توزیع)

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $P_X(x)$ باشد آنگاه تابع توزیع X را با نام $F_X(x)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P_X(t) \quad \text{میزان انباشتی تا نقطه } x$$

مثال: سکه‌ای را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم تابع حتمی تابع توزیع آن را بدست آوریم و تابع توزیع آن را رسم کنید

$$S = \{HHH, HHT, HTH, \dots, TTT\}$$

$$n(S) = 2^3 = 8$$

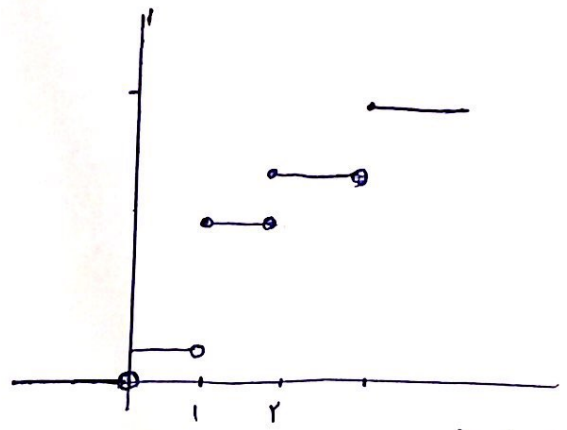
تعداد کل حالتها

$$X = 0, 1, 2, 3$$

	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P(X=1) = P(\{HTT, THT, TTH\})$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$



معمولاً تابع توزیع

خواص تابع توزیع

۱- برای هر x داریم $0 \leq F_X(x) \leq 1$

۲- تابع توزیع یک تابع غیر نزولی است

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \quad \text{۳-}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F_X(x) = F_X(a)$$

۴- تابع همواره از سمت راست پیوسته است

توزیع احتمالات توأم دو متغیره :

ممکن است نتایجی از چندین متغیر تصادفی را به طور همزمان لازم داشته باشیم که در حسن حالتی نیاز به تابع توأم دو متغیر تصادفی است. تابع دو متغیره نیز مانند تابع یک متغیره می تواند گسسته یا پیوسته باشد که ما در اینجا فقط به توابع دو متغیره گسسته اشاره می کنیم. اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، توزیع احتمال برای وقوع همزمان آن‌ها به صورت تابع دو متغیره نشان داده می شود و معمولاً آن را توزیع احتمال توأم X و Y گویند و منظورم به صورت زیر است

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

تعریف: تابع $P_{X,Y}(x,y)$ را یک تابع احتمال توأم دو متغیره گسسته X و Y گویند هرگاه

$$\sum \sum P_{X,Y}(x,y) = 1 \quad (2) \quad P_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad (1)$$

« حال آنکه تابع دو متغیره را روی نقاط X جمع نزاع می کنیم و بدست می آید در عکس »

مثال: فرض کنید تابع دو متغیره X و Y به صورت زیر تعریف شده باشد

از داخل جعبه ای که شامل ۳ توپ آبی، ۲ توپ قرمز و ۴ توپ سفید است دو توپ به تصادف یک به یک بدون جایگزینی انتخاب می کنیم. تعداد توپ های آبی مشاهده شده $X =$

" " قرمز " " $Y =$

الف - تابع احتمال توأم X و Y را بنویسید

ب - $P(X+Y \leq 1)$ را محاسبه کنید

حل: از آنجایی که در جعبه ۳ توپ آبی و ۲ توپ قرمز است و ما می خواهیم دو توپ انتخاب کنیم پس این دو توپ می تواند هر دو آبی یا هر دو قرمز یا یکی قرمز یکی آبی یا یکی قرمز یکی سفید یا یکی آبی یکی سفید باشد پس با این حساب

$$X = 0, 1, 2$$

$$Y = 0, 1, 2$$

$$P(X=0, Y=0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}$$

$$P(X=0, Y=1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}$$

$$P(X=0, Y=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{9}{2}}$$

و این ترتیب جدول زیر ساخته می شود

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

$$P(X+Y \leq 1) = \frac{9}{36} + \frac{12}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{24}{36}$$

مجموع احتمالات مورد نظر قرمز انتخاب شده که مجموع دو متغیر که حتماً یا مساوی ۱ می باشد.

حال اگر بخواهیم تابع حتمی X و تابع حتمی Y را پیدا کنیم کافی است اعداد روی سطر را جمع کنیم تا تابع حتمی Y بدست آید و یا روی ستون جمع کنیم تا تابع حتمی X بدست آید یعنی

$X \backslash Y$	0	1	2	$P_Y(y)$
0	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{21}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{14}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$P_X(x)$	$\frac{14}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{3}{36}$	1

مثال: تابع احتمال دوام متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C(x+y) & x=0,1,2,3 \text{ و } y=0,1,2 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار C را چنان بیابید که تابع فوق یک تابع احتمال باشد

مقادیر $x+y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P_Y(y)$
0	0	C	$2C$	$3C$	$6C$
1	C	$2C$	$3C$	$4C$	$10C$
2	$2C$	$3C$	$4C$	$5C$	$14C$
$P_X(x)$	$3C$	$6C$	$9C$	$12C$	$30C$

$$30C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{30}$$

توجه داشته باشید که جمع نقاط احتمالی باید حتماً یک باشد