



به نام خدا

دانشکده فنی و حرفه ای دختران شیراز - الزهرا



نام درس:

ایستایی 1

استاد:

بهاره شناسا

بهار 99

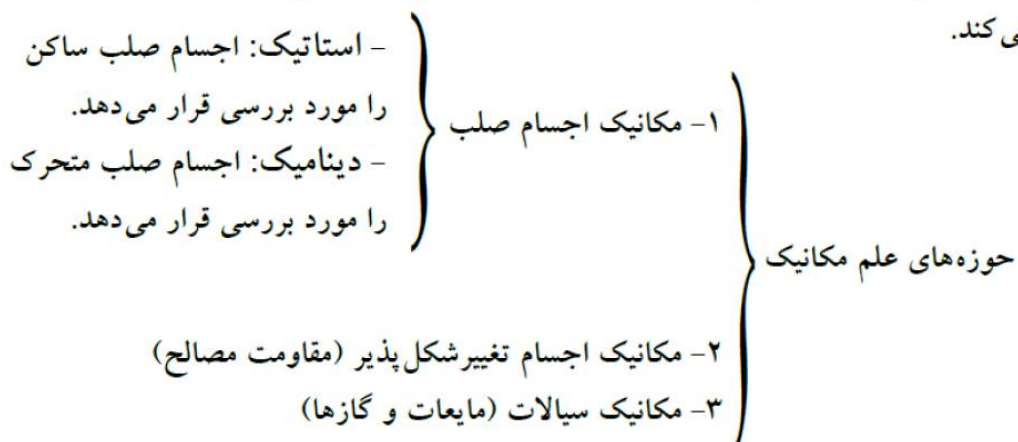
جلسه اول:

مقدمه

تعریف علم مکانیک:

علم مکانیک علمی است که شرایط سکون و حرکت اجسام تحت تاثیر نیرو را بررسی

می کند.



مفاهیم اصلی در علم مکانیک:

مفاهیم اصلی و مورد استفاده در علم مکانیک و معرفی یکاهای اندازه گیری آنها در سامانه بین المللی یکاها (SI) به شرح زیر می باشد.

1- فضا (Space)

ناحیه هندسی است که رویدادهای فیزیکی در آن رخ می دهد. موقعیت هر نقطه در فضا را مکان می نامیم که نسبت به یک نقطه مرجع تعیین می شود و واحد اندازه گیری آن در سامانه SI، متر (m) می باشد.

2- زمان (Time)

فاصله بین وقوع دو رویداد فیزیکی زمان نام دارد و واحد اندازه گیری آن ثانیه (s) می باشد.

3- جرم (Mass)

هر چیزی که فضا را اشغال نماید ماده نام دارد و جسم ماده‌ای است که به وسیله یک سطح بسته محدود شده است. مقدار ماده تشکیل دهنده هر جسم را جرم آن جسم می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن کیلوگرم (kg) است.

4- نیرو (Force)

تأثیر یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن نیوتن (N) است.

فرضیات:

در علم مکانیک به منظور ساده‌تر شدن حل مسائل، فرضیاتی به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

1- جسم صلب (Rigid Body)

جسمی است که در اثر اعمال نیرو تغییر شکل ندهد.

2- نقطه مادی (particle)

جسمی است که از ابعاد آن صرف‌نظر می‌شود؛ به عنوان مثال می‌توان کره زمین را در فضا به صورت یک نقطه مادی در نظر گرفت.

قوانین نیوتن

قانون اول نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر باشد ذره در حال سکون است. (در این حالت اگر ذره دارای حرکت مستقیم الخط یکنواخت باشد با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد).

قانون دوم نیوتن: شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهای وارد بر آن است (یا نیرو متناسب با حاصلضرب جرم در شتاب حرکت است).

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

قانون سوم نیوتن: نیروهای عمل و عکس العمل بین دو جسم در تماس از لحاظ مقدار با هم برابر و در یک امتداد و با جهت مخالف می باشد.

سیستم واحدها:

در سیستم های اندازه گیری کمیت های اصلی عبارتند از: طول، جرم و زمان.
در سیستم بین المللی (جهانی) SI واحدهای کمیت های اصلی عبارتند از:
واحد طول متر (m)، واحد جرم کیلوگرم (kg) و واحد زمان ثانیه (s) می باشد.

جلسه دوم:

پیشوندهای تبدیل واحد:

نام پیشوند	علامت اختصاری	مقدار عددی	شکل توانی
پیکو	p	0.0000000001	10^{-12}
نانو	n	0.0000001	10^{-9}
میکرو	μ	0.00001	10^{-6}
میلی	m	0.001	10^{-3}
کیلو	K	$1,000$	10^3
مگا	M	$1,000,000$	10^6
گیگا	G	$1,000,000,000$	10^9
ترا	T	$1,000,000,000,000$	10^{12}

بردارها:

کمیت های فیزیکی:

1- کمیت های عددی یا اسکالر

کمیت هایی هستند که فقط دارای اندازه یا مقدار می باشند؛ مانند جرم، زمان، طول جسم و کار و انرژی.

2- کمیت های برداری

کمیت هایی هستند که علاوه بر مقدار دارای جهت و راستا نیز می باشند. مانند: بردارهای نیرو، گشتاور، سرعت، شتاب و جابجایی.

بردارها (vector)

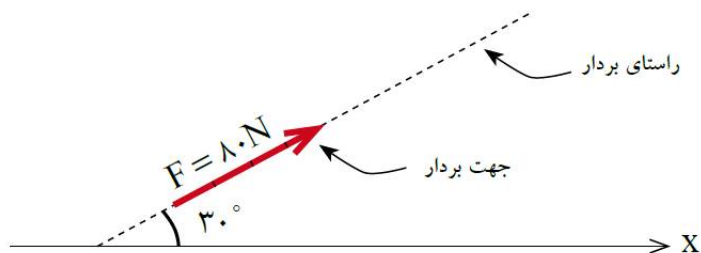
هر بردار به صورت یک پیکان با طولی متناسب با مقدار آن ترسیم می شود.

به عنوان مثال در شکل زیر، بردار نیروی (F) با مقدار 80 N و با زاویه 30° درجه نسبت به

محور X و در جهت و راستای نشان داده شده ترسیم شده است.

نکته:

زاویه امتداد هر بردار باید با یک امتداد مبنا که معمولاً امتدادهای X یا Y است، مشخص شود.

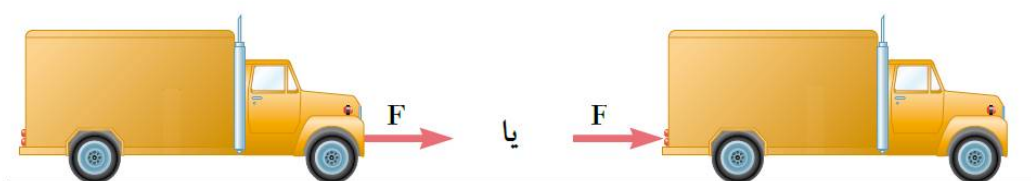


انواع بردار:

1- بردار لغزان

برداری است که اگر در راستای خود جابه‌جا شود، اثر آن بر جسم تغییر ننماید. همانند نیروی

F در شکل زیر

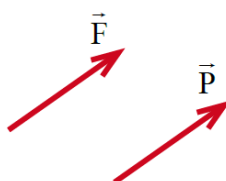


2- بردار ثابت

برداری است که مکان معینی را در فضا اشغال می‌کند و نمی‌توان آن را جابجا نمود. مثلاً ضربه‌ای که به سر انسان وارد می‌شود با ضربه‌ای که با همان مقدار و همان جهت به پای او وارد می‌آید متفاوت است.

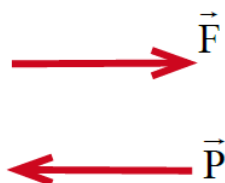
3- بردارهای هم‌سنگ

دو بردار مساوی، موازی و هم‌جهت را بردارهای هم‌سنگ گویند.



4- بردارهای زوج

دو بردار مساوی، موازی و مختلف جهت را بردارهای زوج گویند.



5- بردارهای مخالف

دو بردار مساوی، هم راستا و مختلف جهت را بردارهای مخالف گویند.

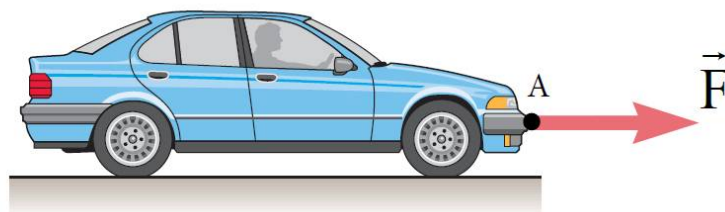


6- بردار یکه (واحد)

برداری که مقدار (اندازه) آن برابر واحد است را بردار یکه یا واحد گویند.

7- بردار نیرو

برداری است که علاوه بر مقدار، جهت و راستا دارای نقطه اثر نیز می باشد و واحد اندازه گیری آن نیوتن (N) است و مطابق قانون دوم نیوتن به صورت زیر تعریف می شود:



تعریف نیوتن با استفاده از قانون دوم نیوتن:

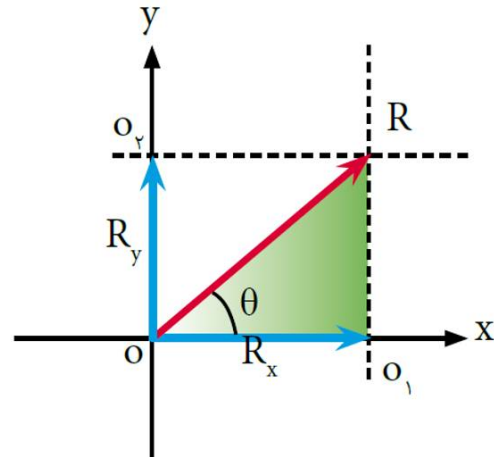
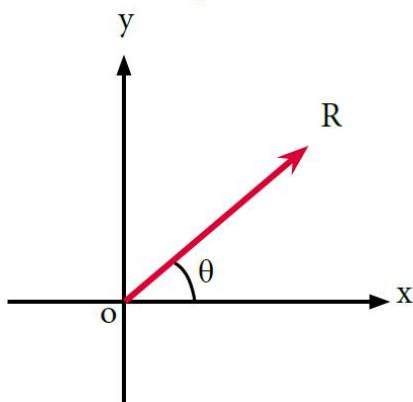
یک نیوتن مقدار نیرویی است که اگر به جرم یک کیلوگرم وارد شود، در آن شتابی معادل یک متر بر مجذور ثانیه و در جهت اعمال نیرو ایجاد نماید.

$$F = m.a$$

$$1N = 1kg \times 1 \frac{m}{s^2}$$

تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های متعامد آن در دستگاه مختصات دکارتی

مطابق شکل زیر بردار R با زاویه θ نسبت به محور x مفروض است. می‌خواهیم آن را روی محورهای متعامد x, y تجزیه نماییم.



$$\cos \theta = \frac{R_x}{R} \Rightarrow$$

$$R_x = R \cdot \cos \theta$$

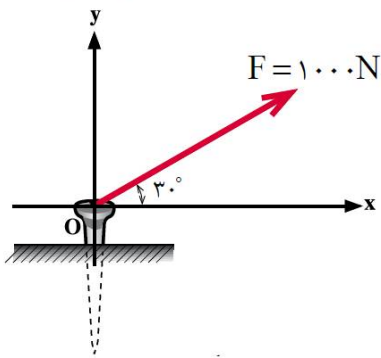
$$\sin \theta = \frac{R_y}{R} \Rightarrow$$

$$R_y = R \cdot \sin \theta$$

جلسه سوم:

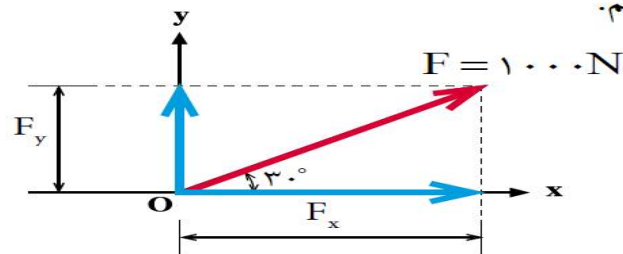
مثال:

نیروی F مطابق شکل بر میخی وارد می‌شود. مطلوب است تجزیه این نیرو روی محورهای x و y و محاسبه مقادیر مؤلفه‌ها.



حل:

نیروی F را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه می‌کنیم.



$$F_x = F \cos \theta = 1000 \times \cos 30^\circ \Rightarrow \boxed{F_x = 866 / 0.2 \text{ N}}$$

$$F_y = F \sin \theta = 1000 \times \sin 30^\circ \Rightarrow \boxed{F_y = 500 \text{ N}}$$

نمایش برداری یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی:

در دستگاه مختصات دکارتی محورهای ox و oy بر یکدیگر عمود بوده و بردارهای واحد (یکه) روی آنها به ترتیب با $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نمایش داده می‌شوند و برداری مانند بردار $\vec{R}$ در این دستگاه با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

که در رابطه بالا R_x مؤلفه $\vec{R}$ روی محور x و R_y مؤلفه $\vec{R}$ روی محور y می‌باشد.

مثال:

فرم برداری مثال قبل را بنویسید.

حل:

فرم برداری بردار $\vec{F}$ به صورت $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ می‌باشد.

$$F_x = ۸۶۶ / ۰.۲ \text{ N}$$

$$F_y = ۵۰۰ \text{ N}$$

$$\boxed{\vec{F} = ۸۶۶ / ۰.۲ \vec{i} + ۵۰۰ \vec{j}}$$

تعیین اندازه یک بردار با استفاده از مؤلفه های متعامد آن

همان طور که یک بردار را می توان به دو مؤلفه روی امتدادهای مختلف تجزیه کرد می توان به کمک مؤلفه های یک بردار، اندازه بردار و زاویه آن را به کمک رابطه فیثاغورث و نسبت های مثلثاتی تعیین کرد.

هر گاه برداری مانند $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$ داشته باشیم، می توان اندازه R و زاویه آن را با امتداد x به صورت زیر تعیین نمود:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

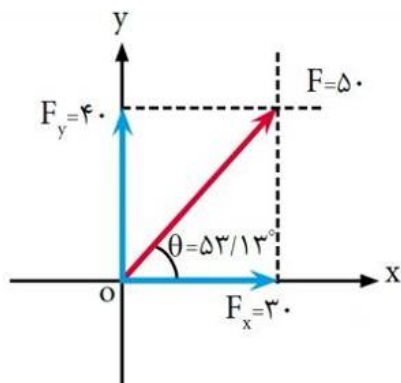
مقدار اندازه بردار R

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right|$$

زاویه بردار R نسبت به محور x ها

مثال:

بردار $\vec{F} = (30 \vec{i} + 40 \vec{j})$ را ترسیم نموده، مقدار و زاویه آن را با محور x ها به دست آورید.



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{30^2 + 40^2} \Rightarrow \boxed{F = 50}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left| \frac{40}{30} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 53/13^\circ}$$

خلاصه فصل:

- مؤلفه‌های متعامد یک بردار در صفحه مختصات دکارتی با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$R_x = R \cdot \cos \theta$$

$$R_y = R \cdot \sin \theta$$

- فرم برداری یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن در صفحه مختصات دکارتی عبارت است از:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

- برای جمع و تفریق بردارهای هم‌راستا و یا موازی کافی است اندازه آن‌ها را با یکدیگر به صورت جبری جمع و یا تفریق نمود.

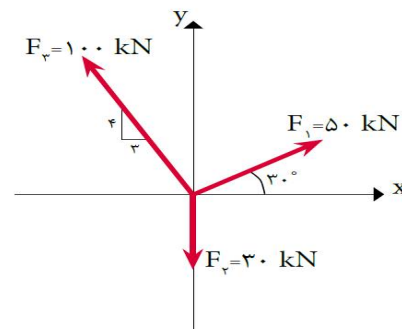
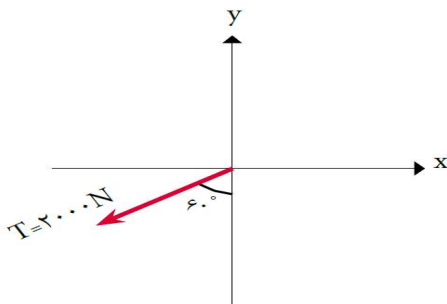
- اندازه برداری مانند $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$ و زاویه آن با محور x از روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{اندازه بردار } R$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) \quad \text{زاویه بردار } R \text{ با محور } x$$

مثال:

بردارهای زیر را به مؤلفه‌های متعامد آن تجزیه نمایید و فرم برداری آن‌ها را بنویسید.



جلسه چهارم:

نیرو و سامانه نیرویی

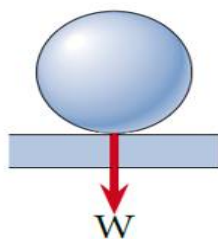
نیرو: کمیتی است برداری که می تواند باعث ایجاد حرکت، تغییر شکل یا چرخش در اجسام گردد.

انواع نیرو

نیروهای خارجی

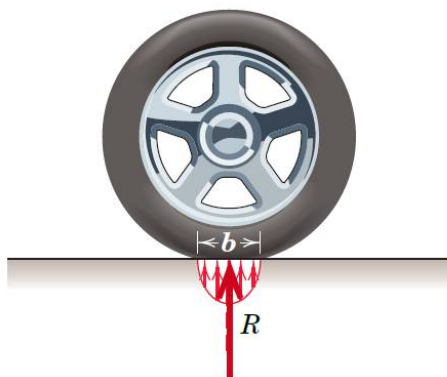
نیروهایی هستند که از محیط اطراف و در خارج از وجود جسم به آن وارد می شوند.

مکانیک اجسام صلب (استاتیک) فقط به نیروهای خارجی توجه دارد مانند: وزن گوی که به کف وارد می شود.



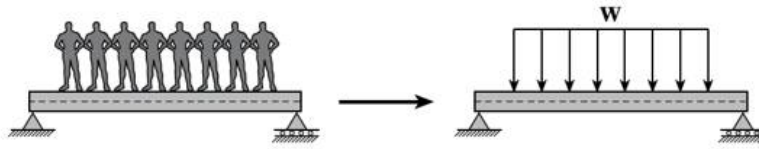
نیروهای متمرکز:

اگر نیرو به طول کوچکی از جسم وارد گردد آن را نیروی متمرکز می نامند.

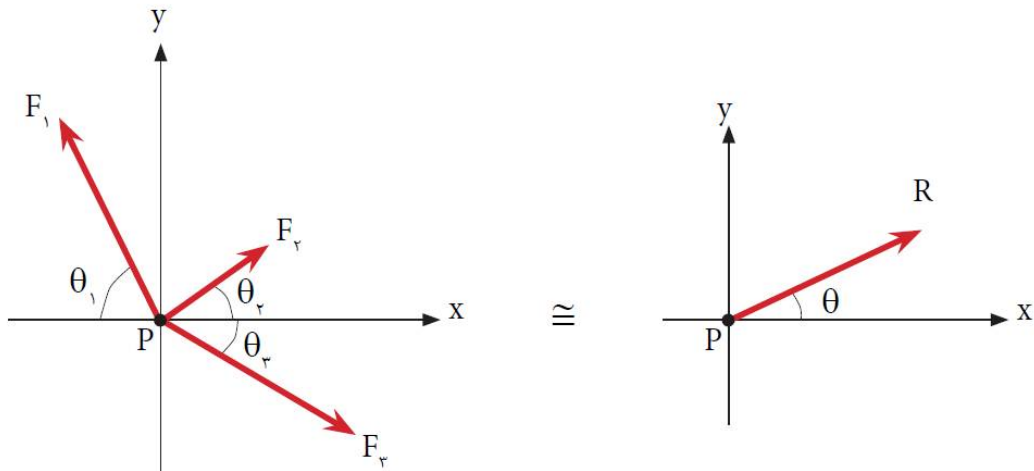


نیروهای گسترده:

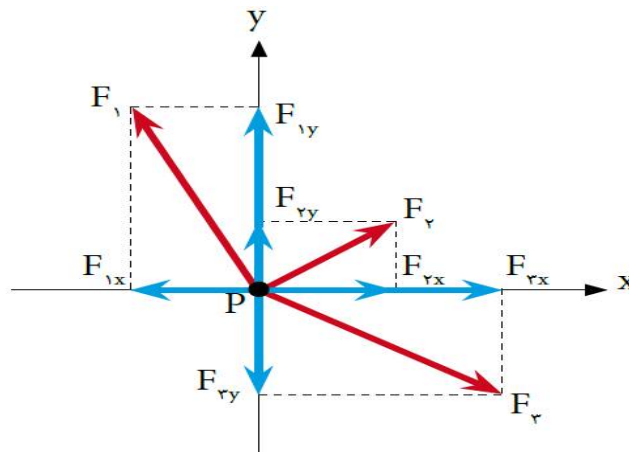
اگر نیرو در طول قابل توجهی از جسم پخش گردد آن را نیروی گسترده گویند.



محاسبه برآیند سامانه چند نیرویی وارد به نقطه مادی:



گام اول: تجزیه هر یک از نیروها روی محورهای x و y :



گام دوم: نمایش برداری تمامی نیروها بر حسب بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ ؛
گام سوم: محاسبه مجموع نیروهای هم راستا روی محورها x و y

$$\vec{R}_x = \sum F_x, \quad \vec{R}_y = \sum F_y$$

$\sum F_x$: مجموع مؤلفه‌های هم راستا با محور x

$\sum F_y$: مجموع مؤلفه‌های هم راستا با محور y

گام چهارم: نمایش برداری بردار برآیند ($\vec{R}$)

$$\vec{R} = (\sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j})$$

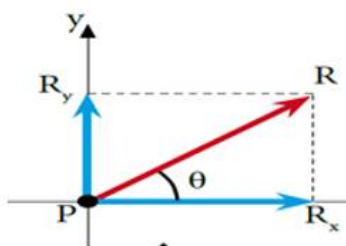
گام پنجم: نمایش ترسیمی بردار برآیند

گام ششم: محاسبه اندازه (مقدار) برآیند

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

گام هفتم: محاسبه زاویه برآیند با امتداد محور x ها (θ)
 با استفاده از رابطه تانژانت و با توجه به شکل ترسیم شده

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right|$$



جلسه پنجم:

مثال:

دو نیرو مطابق شکل توسط دو کابل بر یک سنگ معدنی وارد می شود. مطلوب است:

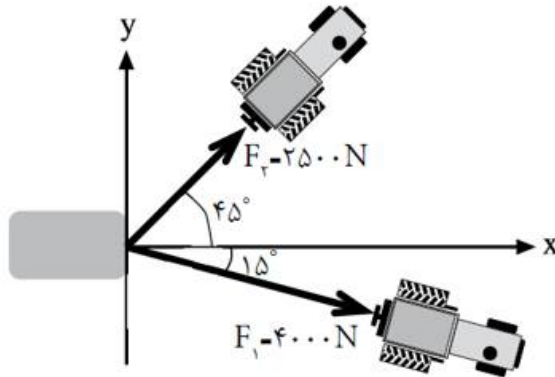
الف) نمایش برداری برآیند

ب) نمایش ترسیمی بردار برآیند

ج) محاسبه اندازه بردار برآیند

د) محاسبه زاویه برآیند با افق

ه) ترسیم مسیر جابه جایی سنگ

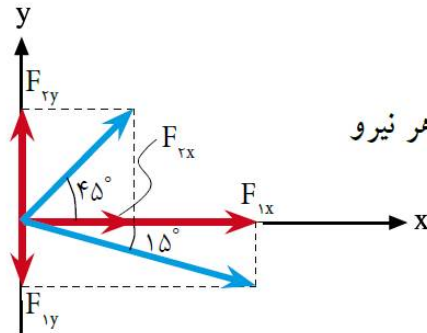


حل:

الف)

گام اول:

- تجزیه نیروها با توجه به اندازه و زاویه هر نیرو

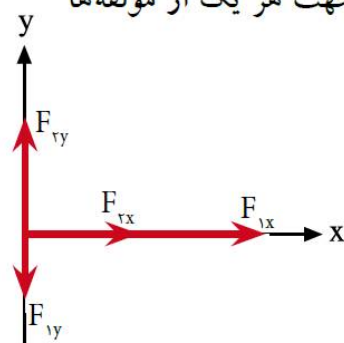


$$F_1 \text{ های مؤلفه های } \begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos \theta_1 = 4000 \times \cos 15^\circ \Rightarrow F_{1x} = 3863 / 70 \text{ N} \\ F_{1y} = F_1 \sin \theta_1 = 4000 \times \sin 15^\circ \Rightarrow F_{1y} = 1035 / 28 \text{ N} \end{cases}$$

$$F_2 \text{ های مؤلفه های } \begin{cases} F_{2x} = F_2 \cos \theta_2 = 2500 \times \cos 45^\circ \Rightarrow F_{2x} = 1767 / 77 \text{ N} \\ F_{2y} = F_2 \sin \theta_2 = 2500 \times \sin 45^\circ \Rightarrow F_{2y} = 1767 / 77 \text{ N} \end{cases}$$

گام دوم:

- فرم برداری هر بردار با توجه به شکل مقابل و جهت هر یک از مؤلفه‌ها



$$\vec{F}_1 = 3863/70 \vec{i} - 1035/28 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = 1767/77 \vec{i} + 1767/77 \vec{j}$$

گام سوم:

- تعیین مجموع نیروهای هم‌راستا با محورهای x و y (ΣF_x و ΣF_y)

$$R_x = \Sigma F_x = 1767/77 + 3863/70 \Rightarrow R_x = 5631/47 \text{ N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 1767/77 - 1035/28 \Rightarrow R_y = 732/49 \text{ N}$$

گام چهارم:

- نمایش برداری بردار برآیند

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

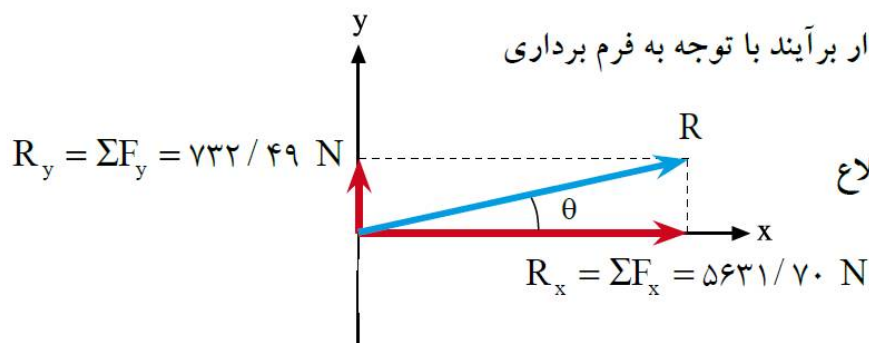
$$\boxed{\vec{R} = 5631/47 \vec{i} + 732/49 \vec{j}}$$

گام پنجم:

- نمایش ترسیمی بردار برآیند با توجه به فرم برداری

برداری برآیند

و روش متوازی الاضلاع



(ج)

گام ششم:

- محاسبه اندازه برآیند به کمک رابطه (۷-۳)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = \sqrt{5631/70^2 + 732/49^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 5678/91 \text{ N}}$$

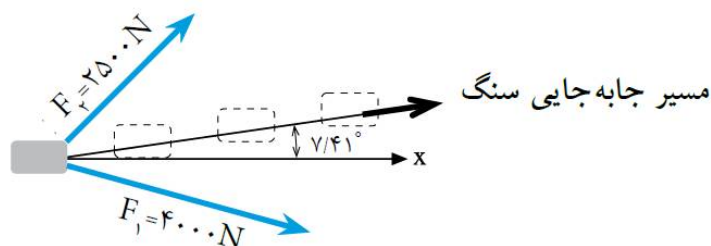
(د)

گام هفتم:

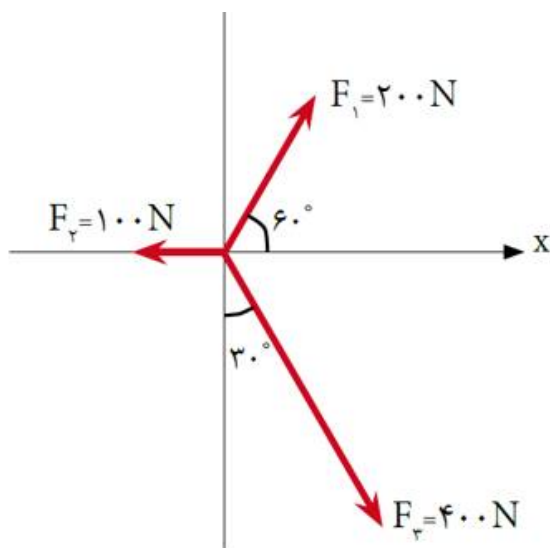
- محاسبه زاویه برآیند با محور x ها به کمک رابطه (۸-۳)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left| \frac{732/49}{5631/70} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 7/41^\circ}$$

(ه) مسیر جابه جایی سنگ در راستای بردار برآیند مطابق شکل زیر خواهد بود.



مثال:



در شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف - محاسبه مقدار برآیند نیروها

ب - محاسبه زاویه برآیند با افق

ج - ترسیم بردار برآیند

د - نمایش برداری بردار برآیند

حل:

الف) تجزیه هر یک از نیروها با توجه به روابط $F_x = F \cos \theta$ و $F_y = F \sin \theta$ و زاویه هر نیرو

با محور x ها: $\vec{F}_1 = 200 \cos 60^\circ \vec{i} + 200 \sin 60^\circ \vec{j} = 100 \vec{i} + 173/2 \vec{j}$

$$\vec{F}_2 = -100 \vec{i}$$

$$\vec{F}_3 = 400 \cos 60^\circ \vec{i} - 400 \sin 60^\circ \vec{j} = 200 \vec{i} - 346/4 \vec{j}$$

$$\vec{R}_x = \Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$\vec{R}_x = \Sigma F_x = 100 - 100 + 200 \Rightarrow \vec{R}_x = 200 \text{ N}$$

$$\vec{R}_y = \Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

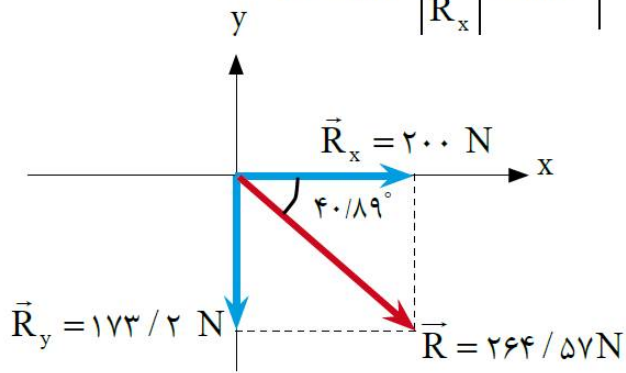
$$\vec{R}_y = \Sigma F_y = 173/2 + 0 - 346/4 \Rightarrow \vec{R}_y = -173/2 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{200^2 + (-173/2)^2} \Rightarrow \boxed{R = 264/57 \text{ N}}$$

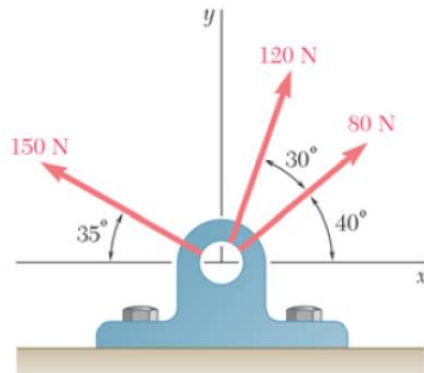
(ب)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-173/2}{200} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 40.89^\circ}$$

(ج)



(د) $\vec{R} = 200 \vec{i} - 173/2 \vec{j}$



مثال - سه نیرو مطابق شکل به یاقاقان اثر می کند. مطلوبست:

الف) تعیین برآیند این سه نیرو .

ب) تعیین امتداد برآیند.

حل: الف

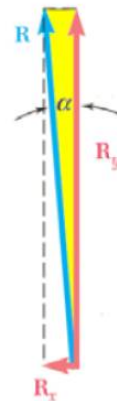
$$R_x = \sum F_x = 80 \cos 40 + 120 \cos 70 - 150 \cos 35 = -20.55 \text{ N}$$

$$R_y = \sum F_y = 80 \sin 40 + 120 \sin 70 + 150 \sin 35 = 250.22 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-20.55)^2 + 250.22^2} = 251 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{20.55}{250.22} = 4.7^\circ$$

حل: ب

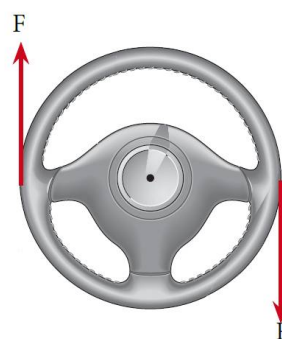
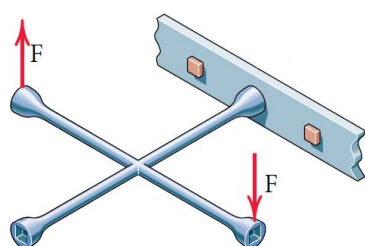


جلسه ششم:

گشتاور، لنگر (ممان)

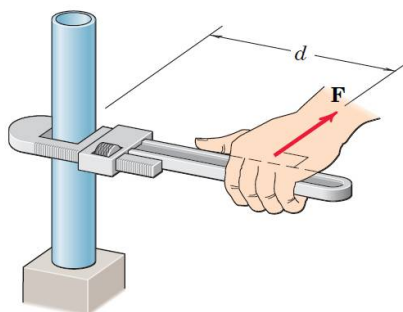
یکی از اثرات نیرو بر اجسام تمایل به ایجاد چرخش در آن‌ها می‌باشد که به این پدیده گشتاور گفته می‌شود.

مطابق شکل‌های زیر نیرو باعث چرخش در اجسام می‌گردد.



مقدار گشتاور حول یک محور عبارت است از حاصل ضرب نیرو (F) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو یا امتداد آن تا محور مورد نظر (d). گشتاور را با M نمایش می‌دهند و رابطه آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M = F \cdot d$$



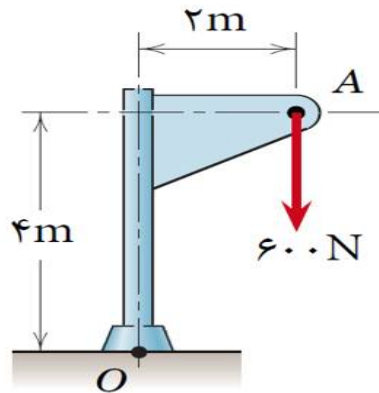
(a)

قرار داد:

جهش چرخش عقربه های ساعت مثبت فرض می شود.

مثال:

گشتاور نیروی F حول نقطه O را محاسبه و جهت چرخش آن را بنویسید.



حل:

$$F = 600 \text{ N}$$

$$d = 2 \text{ m}$$

$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 2 \Rightarrow M_o = 1200 \text{ N.m}$$

ساعت گرد

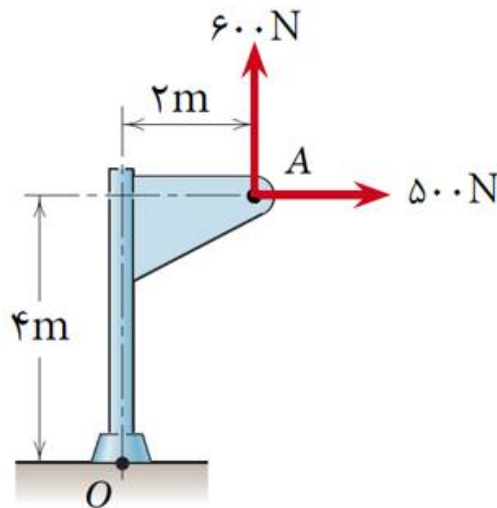
گشتاور چند نیرو:

اگر به یک جسم چند نیرو اعمال شود گشتاور آن‌ها نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع جبری گشتاور هر نیرو نسبت به آن نقطه یعنی:

$$M_O = \sum_{i=1}^n F_i d_i = F_1 d_1 + F_2 d_2 + \dots + F_n d_n$$

مثال:

در شکل زیر گشتاور نیروهای نشان داده شده را حول نقطه O محاسبه کنید و جهت آن‌را بنویسید.



حل:

$$F_1 = 500 \text{ N}$$

$$d_1 = 4 \text{ m}$$

$$F_2 = 600 \text{ N}$$

$$d_2 = 2 \text{ m}$$

$$M_O = F_1 d_1 + F_2 d_2$$

$$M_O = 500 \times 4 - 600 \times 2$$

$$\boxed{M_O = +800 \text{ N.m}} \quad \text{ساعت گرد}$$

قضیه وارینون

گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آنها حول همان نقطه و یا گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول همان نقطه.

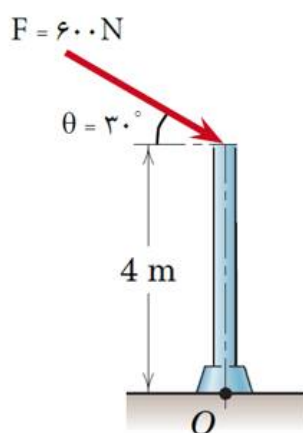
مثال:

گشتاور نیروی F را در شکل زیر به دو روش

حساب کنید:

الف) با استفاده از تعریف گشتاور

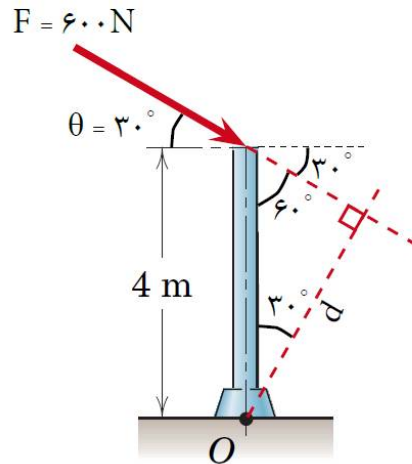
ب) به کمک قضیه وارینون



حل:

الف) با استفاده از تعریف:

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه بازوی لنگر یعنی (d) را محاسبه می‌نمائیم؛ داریم:



$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{d}{4} \Rightarrow d = 4 \times \cos 30^\circ \Rightarrow d = 3.46 \text{ m}$$

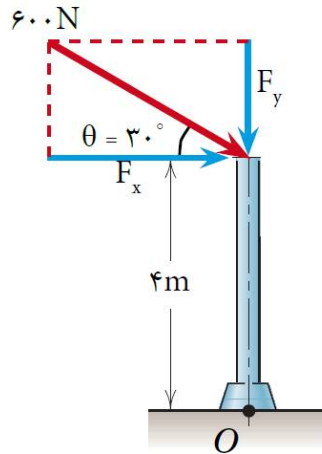
$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 3.46 \Rightarrow \boxed{M_o = 2078.4 \text{ N.m}}$$

ب) با استفاده از قضیه وارینون

در این روش ابتدا نیروی F را به دو مؤلفه متعامد تجزیه نموده و گشتاور آنها را نسبت به نقطه O محاسبه و با یکدیگر جمع می‌نمائیم.

$$F_x = F \cdot \cos \theta \Rightarrow F_x = 600 \times \cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 519.61 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin \theta \Rightarrow F_y = 600 \times \sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 300 \text{ N}$$



با توجه به شکل بازوی لنگر F_x برابر ۴ متر و چون امتداد مؤلفه F_y از نقطه O می‌گذرد، بازوی لنگر آن صفر است. خواهیم داشت:

$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i d_i \Rightarrow M_o = F_x d_x + F_y d_y$$

$$M_o = F_x \times 4 + F_y \times 0 = 519.61 \times 4$$

$$\boxed{M_o = 2078.44 \text{ N.m}} \quad \curvearrowright$$

نکته:

هرگاه امتداد یک نیرو از نقطه‌ای عبور نماید گشتاور آن نیرو نسبت به همان نقطه برابر صفر است.

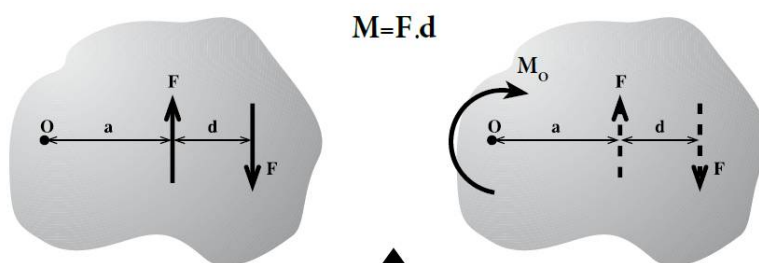
جلسه هفتم:

زوج نیرو:

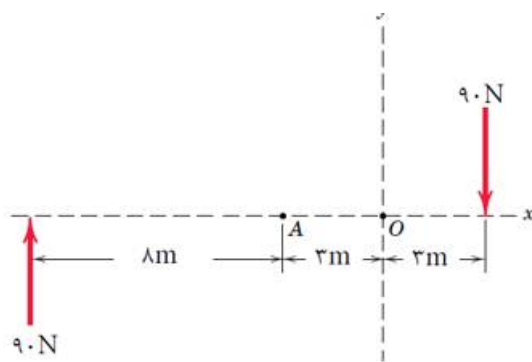
به دو نیروی مساوی - موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.

خصوصیات زوج نیرو:

- ۱- برآیند زوج نیرو صفر است؛
- ۲- در اجسام ایجاد گشتاور (چرخش) می‌نماید؛
- ۳- گشتاور زوج نیرو نسبت به هر نقطه دلخواه مقداری است ثابت و برابر است با حاصل ضرب اندازه یک نیرو در فاصله بین آنها.



مثال:



در شکل روبه‌رو مطلوب است محاسبه

گشتاور دو نیروی ۹۰ نیوتنی:

الف) حول نقطه A

ب) حول نقطه O

ج) با استفاده از خاصیت زوج نیرو

حل:	
(الف)	$M_A = 90 \times 8 + 90 \times 6 = 1260 \text{ N.m}$
(ب)	$M_O = 90 \times 11 + 90 \times 3 = 1260 \text{ N.m}$
(ج)	$M = F.d = 90 \times 14 = 1260 \text{ N.m}$

خلاصه فصل

- نیرو کمیتی است برداری که باعث حرکت، تغییر شکل و یا چرخش اجسام می‌گردد.
- انواع نیرو عبارتند از: نیروهای خارجی، نیروهای داخلی.
- منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت است از نیرویی که به تنهایی اثر همه نیروها را در خود داشته باشد.
- برای تعیین برآیند چند نیرو از روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد استفاده می‌شود و مقدار برآیند از رابطه $R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$
- و زاویه برآیند با محور x ها از رابطه $\theta = \tan^{-1} \left| \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \right|$ به دست می‌آید.
- گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور عبارت است از حاصل ضرب نیرو (F) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو تا آن محور (d). و از رابطه $M = F.d$ به دست می‌آید.
- قضیه وارینون: گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آن‌ها حول همان نقطه.
- به دو نیروی مساوی، موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.
- گشتاور زوج نیرو برابر است با حاصل ضرب یکی از نیروها در فاصله بین آن‌ها.

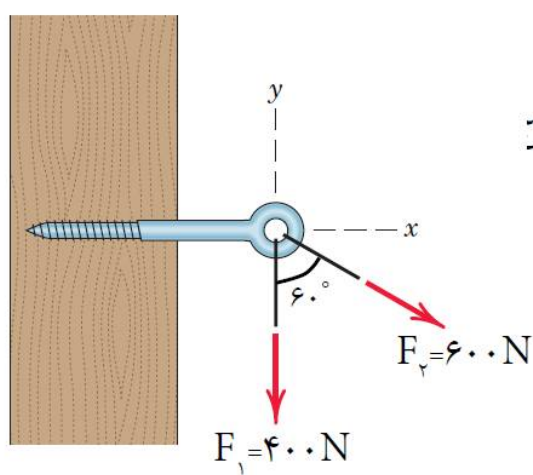
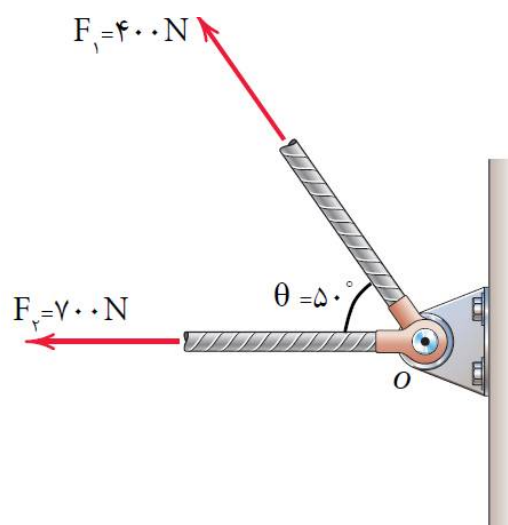
مثال:

۱- در شکل های زیر مطلوب است:

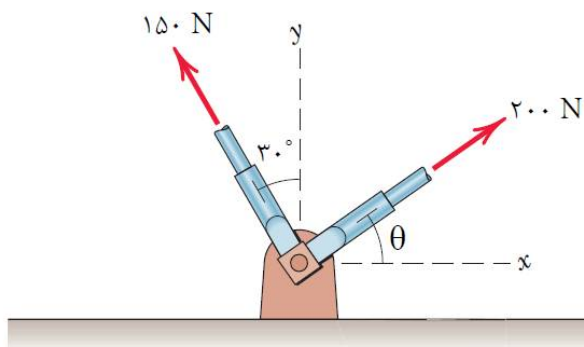
الف) محاسبه مقدار برآیند دو نیرو

ب) محاسبه زاویه برآیند با F_1

ج) محاسبه زاویه برآیند با امتداد افق



۲- در شکل زیر مقدار زاویه θ را چنان تعیین نمایید که برآیند دو نیرو بر محور y ها منطبق گردد. سپس در این حالت مقدار برآیند را محاسبه کنید.



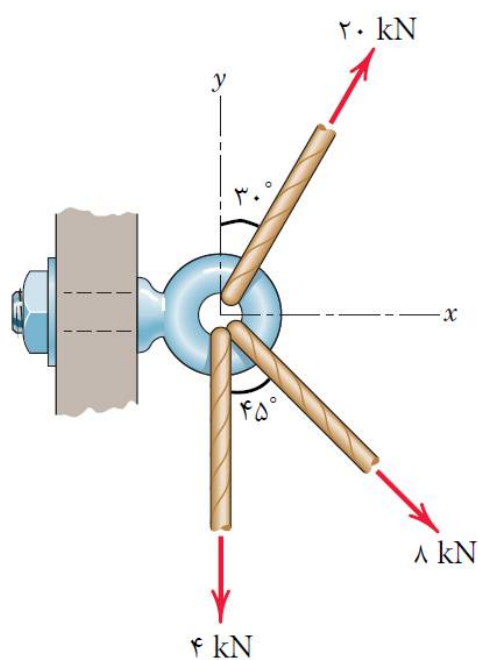
۳- در شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف) محاسبه مقدار برآیند نیروها

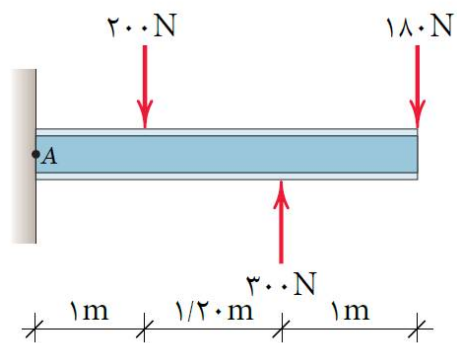
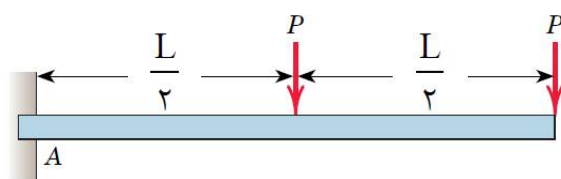
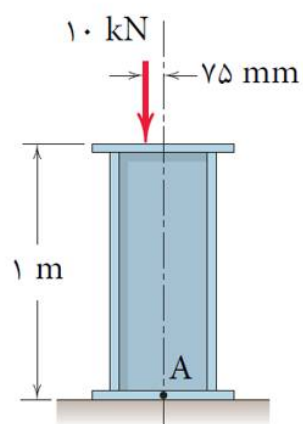
ب) محاسبه زاویه برآیند با افق

ج) ترسیم بردار برآیند

د) نمایش برداری بردار برآیند



4- در شکل های زیر گشتاور نیرو را حول نقطه A محاسبه نمایید.



جلسه هشتم:

تبادل:

مفهوم تبادل آن است که ذره یا جسم مادی هیچ گونه حرکت یا چرخشی نداشته باشد.

به منظور بررسی تبادل اجسام، آن ها را به دو حالت در نظر می گیریم.

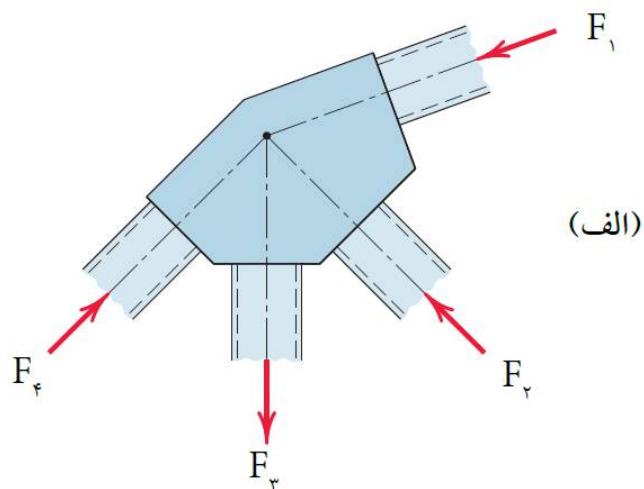
1- نقطه مادی

2- جسم صلب

تبادل نقطه مادی

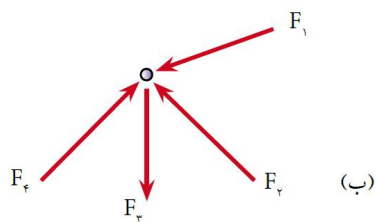
با توجه به تعریف نقطه مادی، نیروهای وارد به جسم در یک نقطه متقارب خواهند بود و شرط تبادل در این حالت آن است که برآیند نیروهای وارده صفر باشد یعنی:

$$\sum \vec{F} = 0$$



در شکل بالا چنانچه از ابعاد قطعات اتصال صرف نظر شود، وضعیت نیروها به صورت زیر خواهد

بود:

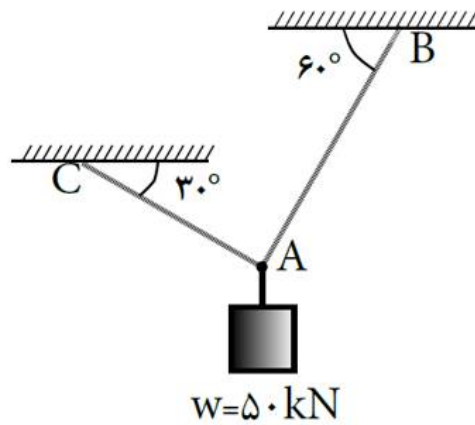


در صفحه مختصات دکارتی رابطه تعادل را می توان به صورت زیر نوشت:

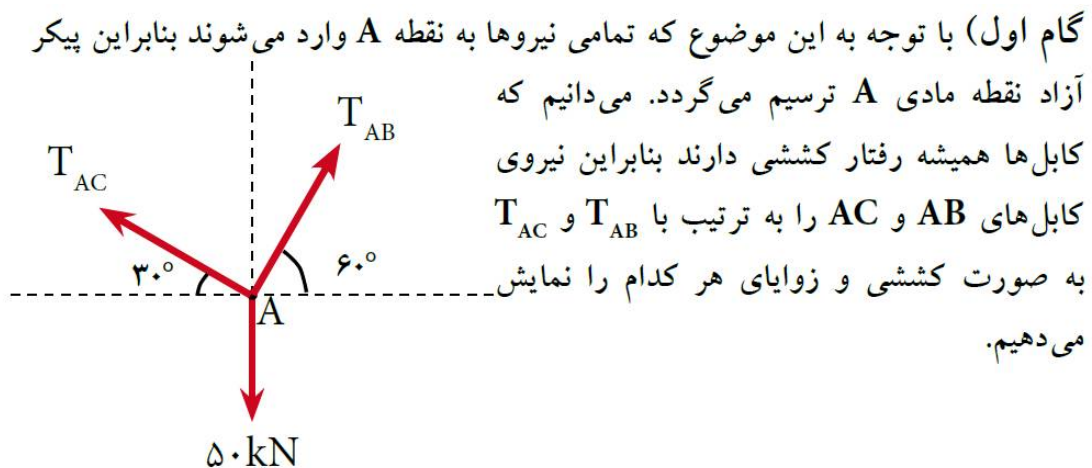
$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = 0 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \end{cases}$$

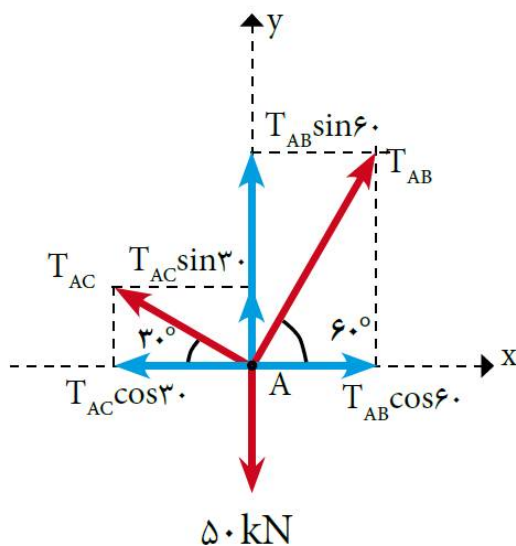
مثال:

کشش کابل های AB و AC را در سامانه در حال تعادل زیر به دست آورید.



حل:





گام دوم) تعیین محورهای مختصات x و y
روی نقطه A و تجزیه نیروها در این دستگاه
مختصات

گام سوم) تشکیل معادلات تعادل (۲-۴) و حل آن‌ها تا رسیدن به خواسته‌های مسئله

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow T_{AB} \cos 60^\circ - T_{AC} \cos 30^\circ = 0 \quad \text{رابطه I}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB} \sin 60^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 50 = 0 \quad \text{رابطه II}$$

چون حل هر یک از معادلات فوق با وجود دو مجهول امکان‌پذیر نیست بنابراین آن‌ها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی قرار داده که با استفاده از روش‌های مختلف قابل حل است.

در این جا از معادله اول یکی از مجهولات را بر حسب دیگری محاسبه و در معادله دوم قرار می‌دهیم تا یکی از مجهولات حذف شود:

$$\Rightarrow T_{AB} = \frac{T_{AC} \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \Rightarrow T_{AB} = 1/73 T_{AC} \quad \text{رابطه III}$$

مقدار T_{AB} را در رابطه II قرار داده خواهیم داشت:

$$1/73 T_{AC} \times \sin 60^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 50 = 0 \Rightarrow 2 T_{AC} - 50 = 0$$

$$T_{AC} = \frac{50}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{AC} = 25 \text{ kN}}$$

حال مقدار T_{AC} را در رابطه III قرار می‌دهیم:

$$\text{III رابطه} \Rightarrow T_{AB} = 1/73 \times 25$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{AB} = 43/73 \text{ kN}}$$

تعادل جسم صلب

در قسمت قبل بنا به فرض، اجسام را به عنوان یک نقطه مادی در نظر گرفتیم. در حالی که چنین فرضی همیشه امکان پذیر نخواهد بود و نمی توان از ابعاد جسم صرف نظر نمود بنابراین در این حالت نیروها در یک نقطه متقارب نخواهند بود و علاوه بر حرکت، امکان دَوَران (گشتاور) جسم تحت تأثیر نیروهای وارده نیز وجود دارد. لذا شرط تعادل در مورد اجسام صلب به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \leftarrow & \text{۱- برای این که جسم در راستای محور } x \text{ جابه جایی نداشته باشد باید:} \\ \Sigma F_y = 0 \leftarrow & \text{۲- برای این که جسم در راستای محور } y \text{ جابه جایی نداشته باشد باید:} \\ \Sigma M = 0 \leftarrow & \text{۳- برای این که جسم چرخش نداشته باشد باید:} \end{cases}$$

انواع تکیه گاه ها و عکس العمل آن ها

برای بررسی تعادل اجسام صلب، همانند نقاط مادی باید ابتدا پیکر آزاد آن ها را ترسیم نمود. برای این منظور، باید جسم را از محیط اطراف آن جدا نمائیم و چون اجسام بر روی تکیه گاه هایی قرار دارند که با توجه به نوع آن ها مانع از حرکت (جابه جایی) و یا چرخش جسم می گردند، لازم است ابتدا تکیه گاه ها و عکس العمل های آن ها را معرفی نمائیم.

تعریف عکس العمل تکیه گاهی

منظور از عکس العمل تکیه گاهی اجسام واکنشی است که تکیه گاه در جهت حفظ تعادل آن ها از خود نشان می دهد و مانع از حرکت و یا دوران جسم مورد نظر می شود.

انواع تکیه گاه ها

الف) تکیه گاه غلتکی (یک مجهولی)

عبارت است از تکیه گاهی که تنها یک عکس العمل آن هم عمود بر سطح اتکای خود دارد؛ همانند چرخ اتومبیل روی سطح بدون اصطکاک.

ب) تکیه گاه مفصلی (دو مجهولی)

به تکیه گاهی گفته می شود که دارای دو عکس العمل می باشد؛ یکی مماس بر سطح اتکا و دیگری عمود بر آن خواهد بود.

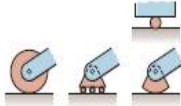
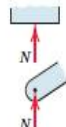
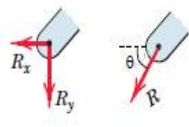
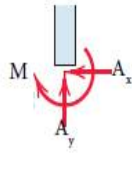
ج) تکیه گاه گیردار (سه مجهولی)

تکیه گاهی است که دارای سه عکس العمل به شرح زیر می باشد:

۱- مماس بر سطح تکیه گاه

۲- عمود بر سطح تکیه گاه

۳- عکس العمل دورانی

ردیف	نوع تکیه گاه	شکل واقعی	شکل شماتیک	عکس العمل های تکیه گاهی
۱	غلتکی			
۲	مفصلی			
۳	گیردار			

جلسه نهم:

محاسبه عکس العمل تکیه گاهی اجسام صلب

گام اول - ترسیم پیکر آزاد جسم

ابتدا جسم را از تکیه گاه ها جدا نموده و با توجه به نوع تکیه گاه، عکس العمل های

مربوطه را در محل تکیه گاه و در جهت دلخواه قرار می دهیم.

به عنوان مثال پیکر آزاد تیر شکل زیر الف به صورت شکل ب خواهد بود.



گام دوم - تجزیه نیروها

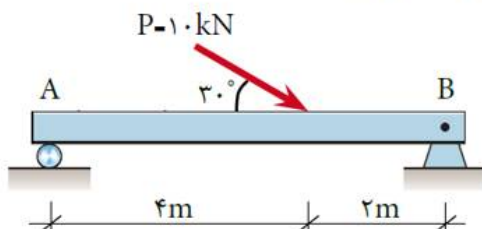
همه نیروهای مورب را روی پیکر آزاد در صورت وجود به مؤلفه های آن تجزیه می نماییم. به عنوان مثال در شکل ب نیروی P به دو مؤلفه متعامد تجزیه شده است.

گام سوم - تشکیل معادلات و حل آن ها

با تشکیل معادلات تعادل و حل آن ها مجهولات مساله (عکس العمل ها) تعیین می شوند.

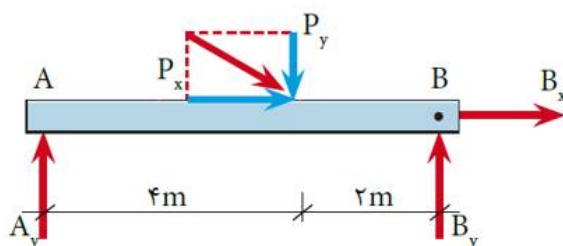
مثال:

عکس العمل های تکیه گاهی تیر زیر را به دست آورید



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد جسم



گام دوم:

تجزیه نیروی P

$$P_x = P \cdot \cos \theta = 10 \times \cos 30^\circ = 8.66 \text{ kN}$$

$$P_y = P \cdot \sin \theta = 10 \times \sin 30^\circ = 5 \text{ kN}$$

گام سوم: تشکیل معادلات تعادل و حل آنها

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow B_x + P_x = 0 \Rightarrow B_x + 8.66 = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = -8.66 \text{ kN}}$$

لازم به توضیح است که علامت منفی در جواب فوق به این معنی است که جهت صحیح

عکس العمل B_x در پیکر آزاد تیر به سمت چپ می باشد

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = P_y \Rightarrow A_y + B_y = 5 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

معادله فوق دارای دو مجهول بوده و قابل حل نمی باشد لذا از شرط سوم یعنی $\sum M = 0$

استفاده می کنیم و در این معادله بهتر است گشتاور نسبت به نقطه ای محاسبه شود که

بیشترین مجهولات تکیه گاهی در آن نقطه متمرکز است (یعنی نقطه B)

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times 6 - P_y \times 2 = 0 \Rightarrow A_y \times 6 - 5 \times 2 = 0 \Rightarrow 6A_y = 10$$

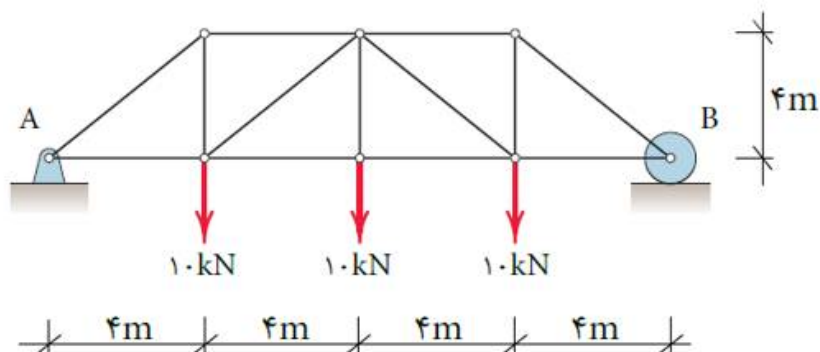
$$A_y = \frac{10}{6} \Rightarrow \boxed{A_y = 1.67 \text{ kN}}$$

حال با قرار دادن مقدار A_y در رابطه I خواهیم داشت:

$$A_y + B_y = 5 \Rightarrow 1.67 + B_y = 5 \Rightarrow B_y = 5 - 1.67 \Rightarrow \boxed{B_y = 3.33 \text{ kN}}$$

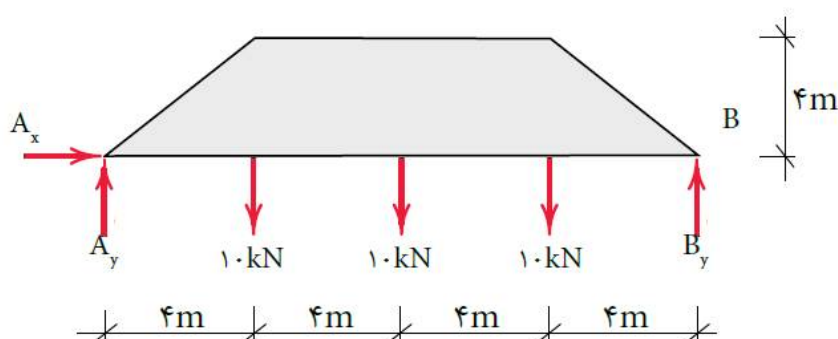
مثال:

عکس العمل های تکیه گاهی را در خرابی شکل زیر به دست آورید.



گام (۱)

ترسیم پیکر آزاد



گام (۲)

تشکیل معادلات تعادل:

با توجه به اینکه نیروی افقی به سیستم وارد نمی شود لذا عکس العمل افقی تکیه گاه A یعنی (A_x) برابر صفر است.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 - 10 - 10 = 0$$

$$A_y + B_y = 30 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 10 \times 4 + 10 \times 8 + 10 \times 12 - B_y \times 16 = 0$$

$$16B_y = 240 \Rightarrow B_y = \frac{240}{16} \Rightarrow \boxed{B_y = 15 \text{ kN } \uparrow}$$

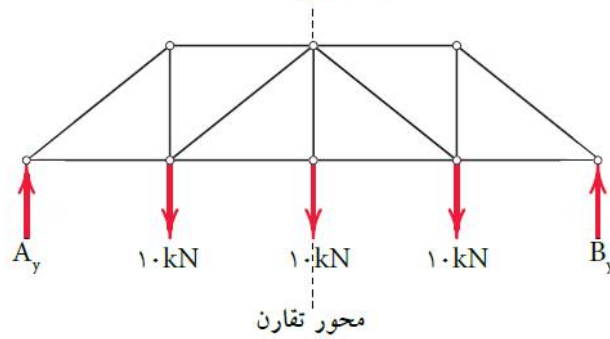
مقدار B_y را در رابطه I قرار می دهیم داریم:

$$A_y + 15 = 30 \text{ kN} \Rightarrow A_y = 15 \text{ kN} \uparrow$$

نکته:

هرگاه بارگذاری و هندسه سازه ای متقارن باشند کل بارهای وارده به صورت مساوی بین دو تکیه گاه تقسیم می شود.

بنابراین با توجه به تقارن در سازه فوق داریم :

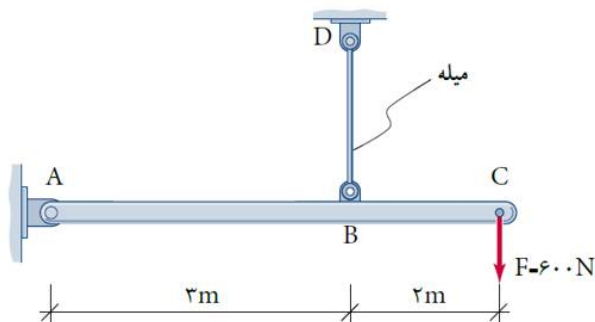


کل بار $= 10 + 10 + 10 = 30 \text{ kN}$

$$A_y = B_y = \frac{30}{2} = 15 \text{ kN}$$

مثال:

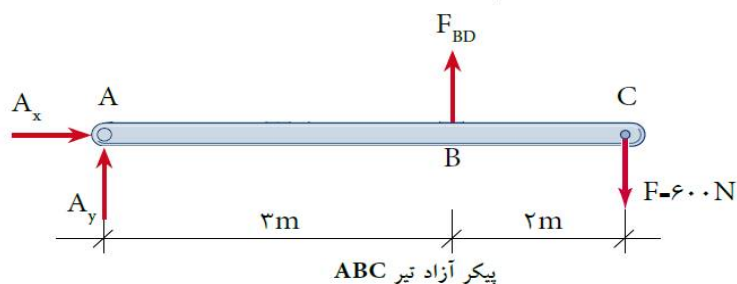
عکس العمل های تکیه گاهی تیر ABC را به دست آورید.



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد تیر ABC

چون عضو BD میله است و با توجه به این که در تکیه گاه میله ای عکس العمل تکیه گاهی، در راستای میله می باشد، خواهیم داشت:



گام دوم:

تشکیل معادلات تعادل

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} - 600 = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} = 600 \text{ N} \quad \text{رابطه I}$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 600 \times 5 - F_{BD} \times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BD} = 1000 \text{ N}}$$

از رابطه I داریم:

$$A_y + F_{BD} = 600 \Rightarrow A_y + 1000 = 600 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -400 \text{ N} \downarrow}$$

با توجه به علامت منفی در مقدار A_y ، جهت عکس العمل تکیه گاهی A_y به طرف پایین خواهد بود.

خلاصه فصل

- مفهوم تعادل آن است که ذره یا جسم مادی هیچ گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.
- شرط تعادل نقطه مادی آن است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد یعنی:

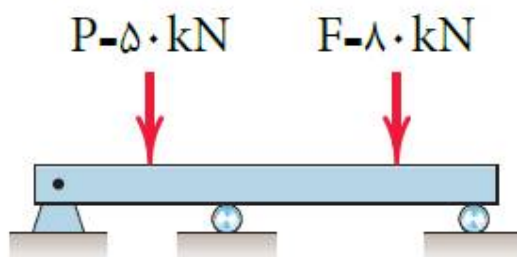
$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = 0 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \end{cases}$$

- هرگاه جسم یا نقطه مادی را از محیط اطراف خود جدا و نیروهای وارد بر آن‌ها را در راستاهای موجود نمایش دهیم، پیکر آزاد جسم و یا نقطه مادی را ترسیم نموده ایم.
- شرایط تعادل جسم صلب عبارت است از:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$

مثال:

پیکر آزاد شکل زیر را رسم کنید.



جلسه دهم:

تحلیل سازه های ساختمانی

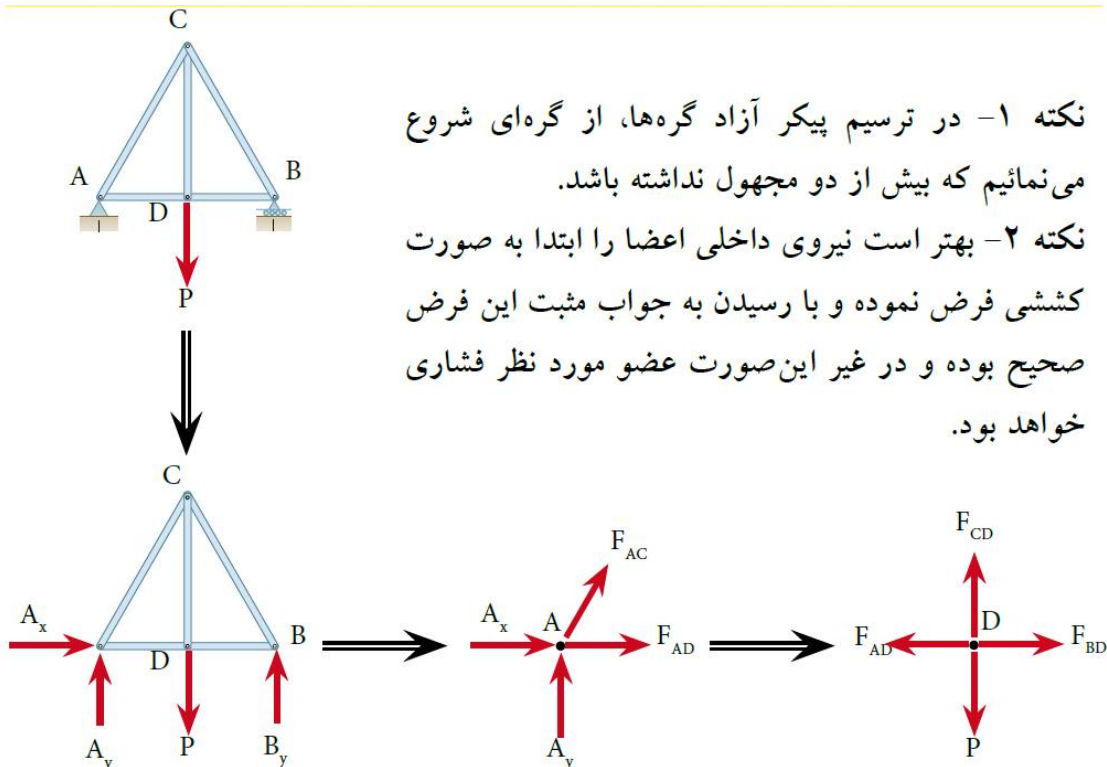
روش تحلیل خرپا

برای تحلیل خرپاها روش های مختلفی وجود دارد که در این قسمت به روش تحلیل مفصلات (گره ها) اشاره می شود و در مقاطع بالاتر با سایر روش های تحلیل خرپا آشنا خواهید شد.

روش مفصلات (گره ها) در تحلیل خرپاها:

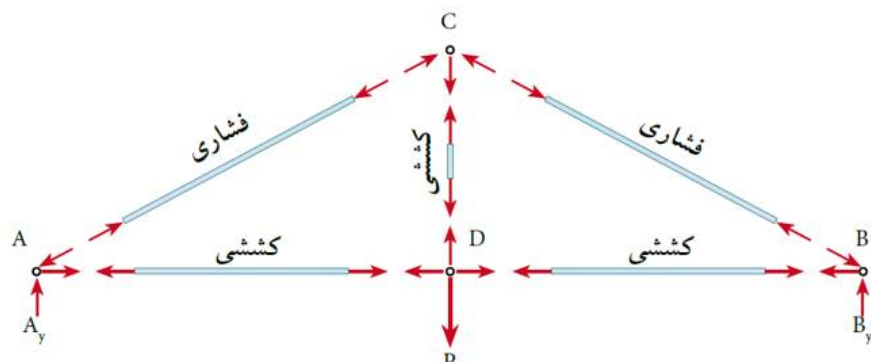
فلسفه این روش بر این اصل استوار است که چون کل خرپا در حال تعادل است پس هر گره آن نیز باید در حال تعادل باشد، بنابراین عموماً مراحل تحلیل خرپا در این روش عبارت است از:

- (۱) محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی ← (۲) ترسیم پیکر آزاد هر گره ←
- (۳) اعمال شرایط تعادل هر گره (نقطه مادی) یعنی: $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$ ← (۴) حل معادلات تشکیل شده و محاسبه مجهولات مورد نظر



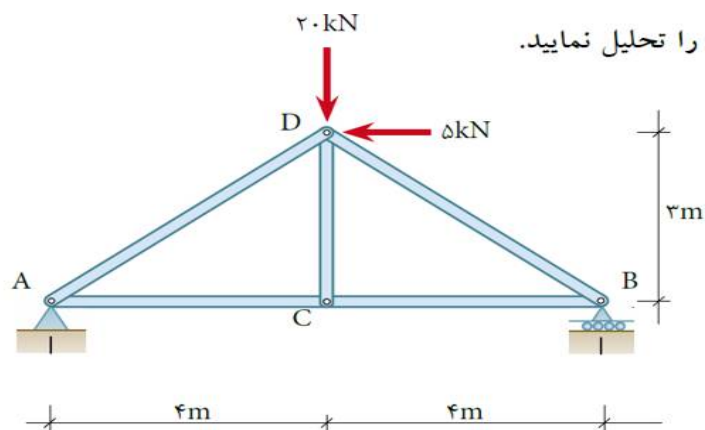
نکته ۳- در ترسیم پیکر آزاد هرگره جهت نیروهای کششی از گره دور شده و جهت نیروهای فشاری به گره نزدیک می‌شود.

نتیجه نهایی تحلیل خریای شکل بالا در زیر آورده شده است.

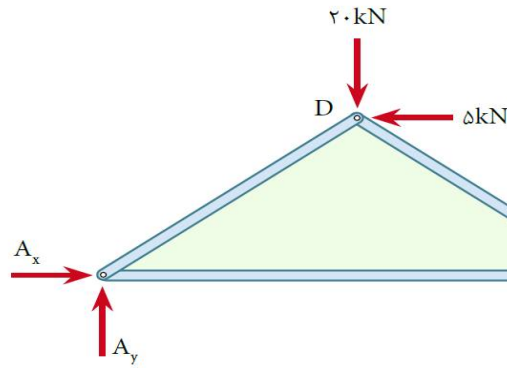


مثال:

خریای شکل روبه‌رو را تحلیل نمایید.



۱ - ترسیم پیکر آزاد کل خرپا.



۲ - محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow A_x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 5 \text{ kN} \rightarrow}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 20 = 0$$

$$A_y + B_y = 20 \text{ kN} \quad \text{معادله I}$$

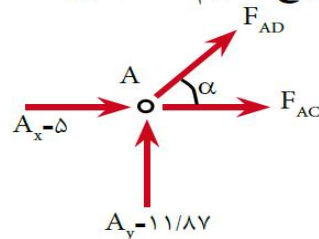
$$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 20 \times 4 - 5 \times 3 - B_y \times 8 = 0$$

$$B_y = \frac{65}{8} \Rightarrow \boxed{B_y = 8.125 \text{ kN}}$$

$$\text{I در معادله } A_y + 8.125 = 20 \Rightarrow \boxed{A_y = 11.875 \text{ kN}}$$

۳ - تحلیل گره ها:

برای تحلیل گره ها با توجه وجود دو عضو (دو مجهول) در هر یک از گره های A و B می توانیم از هریک از آنها شروع نماییم که در این مثال گره A انتخاب می گردد.



پیکر آزاد گره A:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0.6 \\ \cos \alpha = 0.8 \end{cases}$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow 5 + F_{AD} \cos \alpha + F_{AC} = 0 \Rightarrow 5 + 0.8 F_{AD} + F_{AC} = 0 \quad \text{معادله II}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 11.875 + F_{AD} \sin \alpha = 0 \Rightarrow 0.6 F_{AD} = -11.875$$

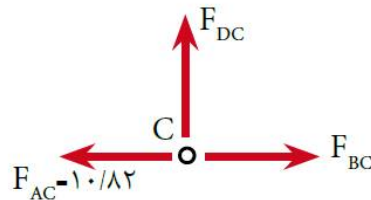
$$\Rightarrow \boxed{F_{AD} = -19.79 \text{ kN} \quad \text{فشاری}}$$

$$\text{II} \Rightarrow 5 + 0/8(-19/78) + F_{AC} = 0$$

$$\Rightarrow F_{AC} = 10/82 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

باتوجه به مشخص شدن نیروی داخلی عضو AC می بینیم که گره C نیز دارای دو مجهول BC و CD می باشد و اکنون می توان تحلیل این گره را آغاز کرد.

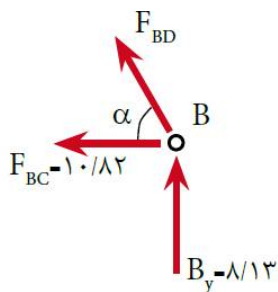
پیکر آزاد گره C :



$$\overset{+}{\Sigma} \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{BC} - 10/82 = 0 \Rightarrow F_{BC} = 10/82 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

$$\overset{+}{\uparrow} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{CD} = 0$$

پیکر آزاد گره B :



$$\overset{+}{\uparrow} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BD} \sin \alpha + 8/13 = 0$$

$$\Rightarrow F_{BD} = \frac{-8/13}{0.6} \Rightarrow F_{BD} = -13/55 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

تحلیل تیرها

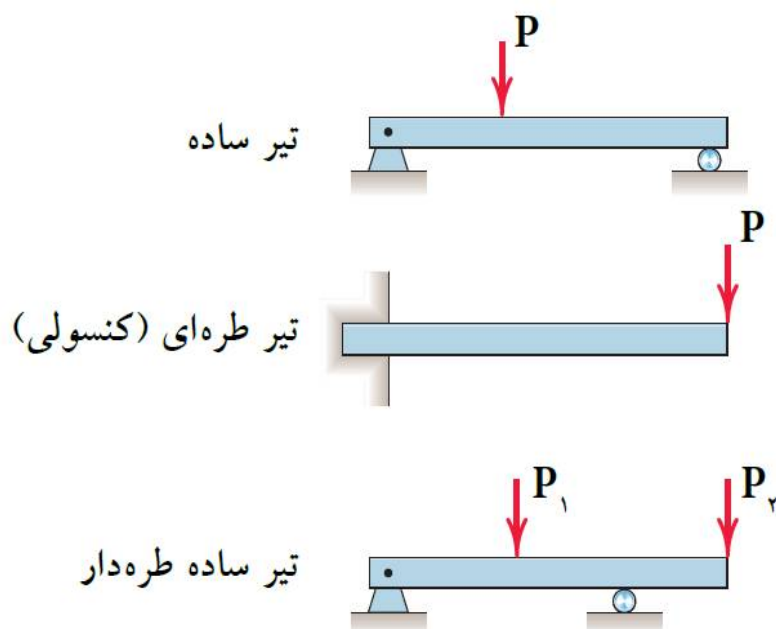
هدف از تحلیل تیر در این فصل تعیین عکس العمل های تکیه گاهی و نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر می باشد.

تعریف تیر (Beam)

تیر عضوی است که بارهای عمود بر محور خود را تحمل و منتقل می نماید و در اکثر سازه های ساختمانی به کار می رود.

انواع تیرها از نظر شرایط تکیه گاهی

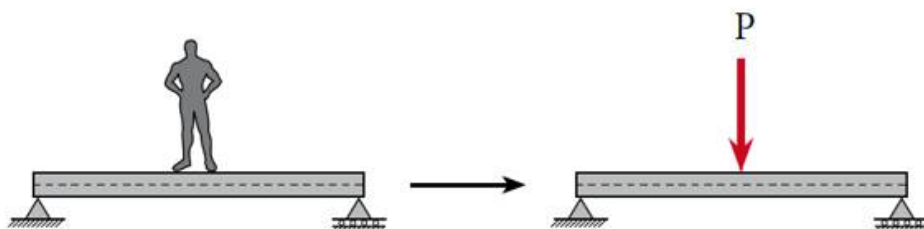
با توجه به انواع تکیه گاه ها که قبلا معرفی شده اند تیرها می توانند به صورت های مختلف روی تکیه گاه ها قرار گیرند که در زیر چند نمونه از آن ها معرفی شده است.



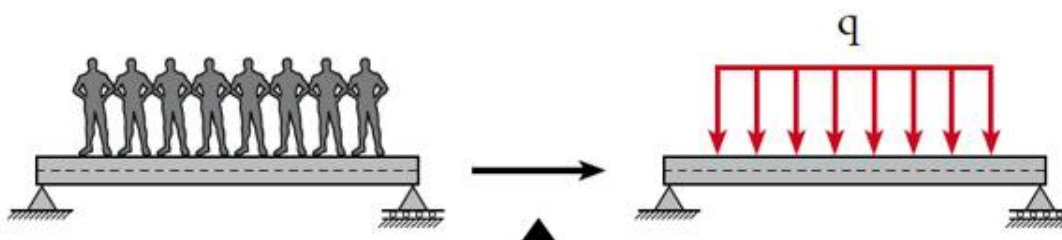
انواع بارهای وارد به تیر

بارها به صورت های گوناگون به تیرها وارد می گردند که تعدادی از آن ها عبارت است از:

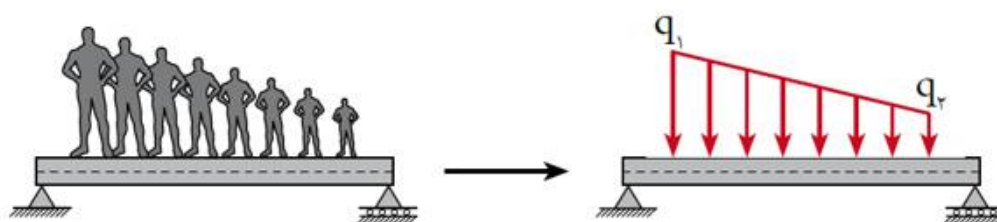
الف) بار متمرکز



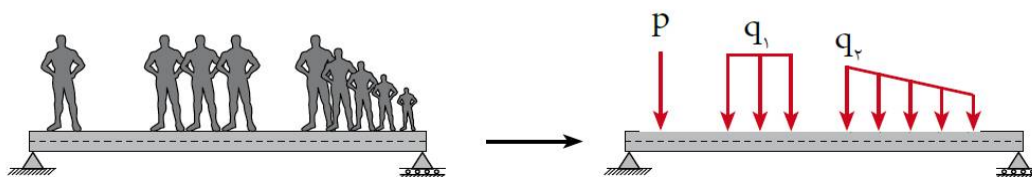
ب) بار گسترده یکنواخت



ج) بار گسترده غیر یکنواخت



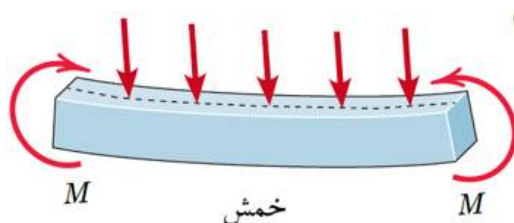
د) ترکیبی از انواع فوق



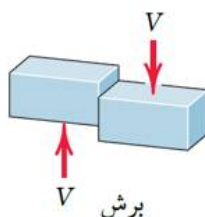
رفتار تیر تحت تاثیر بارهای خارجی:

هنگامی که تیری تحت تاثیر نیروهای خارجی مطابق شکل زیر واقع می شود در آن پدیده های خمش و برش ایجاد می گردد.

پدیده خمش باعث ایجاد کشش و فشار در لایه ها یا تارهای تحتانی و فوقانی تیر می گردد.



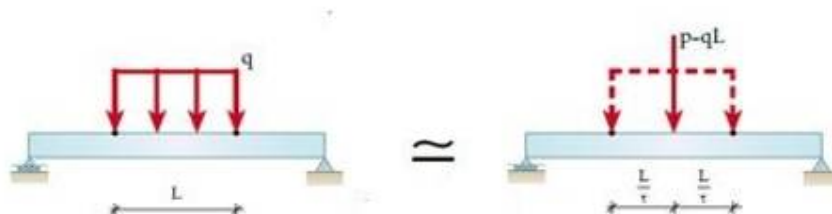
پدیده برش، رفتاری از تیر است که تمایل دارد تیر را در مقاطع مختلف آن قطع نماید.



تعیین عکس العمل های تکیه گاهی تیرها با بار گسترده یکنواخت

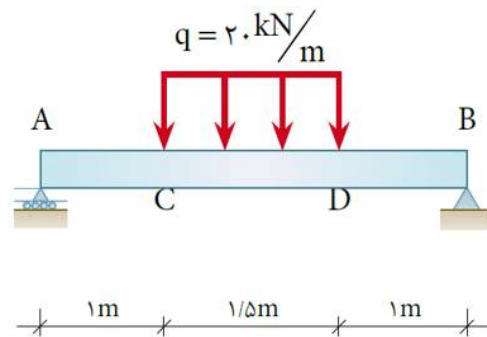
برای محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی تیرها تحت بار گسترده یکنواخت ابتدا باید مقدار و محل اثر برآیند بارهای گسترده یکنواخت وارد به تیر را تعیین نمود. مطابق شکل زیر مقدار برآیند بار گسترده برابر مساحت مستطیل بار وارده و محل اثر آن نقطه تلاقی دو قطر مستطیل (نصف طول آن) خواهد بود.

با توجه به موارد ذکر شده پیکر آزاد تیر را رسم نموده و عکس العمل های تکیه گاهی را محاسبه می نماییم.



مثال:

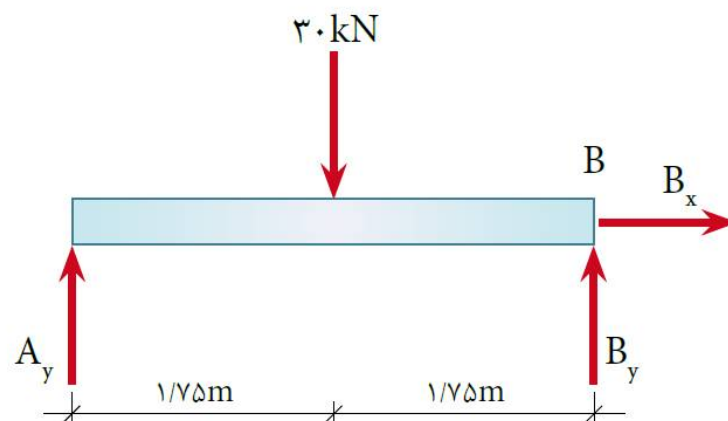
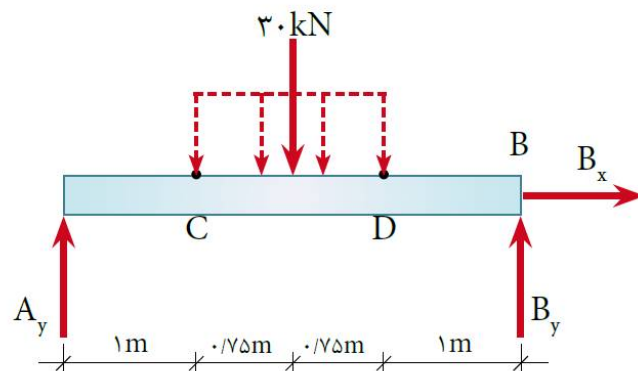
عکس العمل های تکیه گاهی تیر شکل زیر را محاسبه نمایید.



الف) ابتدا مقدار برآیند بار گسترده (مساحت مستطیل) را به دست می آوریم

$$P = q \cdot L \Rightarrow P = 20 \times 1.5 = 30 \text{ kN}$$

ب) محل اثر برآیند بار گسترده در نصف طول مستطیل می باشد که در پیکر آزاد تیر دیده می شود.



ج) با تشکیل معادلات تعادل و حل آن‌ها خواهیم داشت:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 30 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_y + B_y = 30 \text{ kN}} \quad \text{I}$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 30 \times 1/5 - B_y \times 3/5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_y = 15 \text{ kN}}$$

مقدار B_y را در معادله I قرار می‌دهیم تا A_y به دست آید.

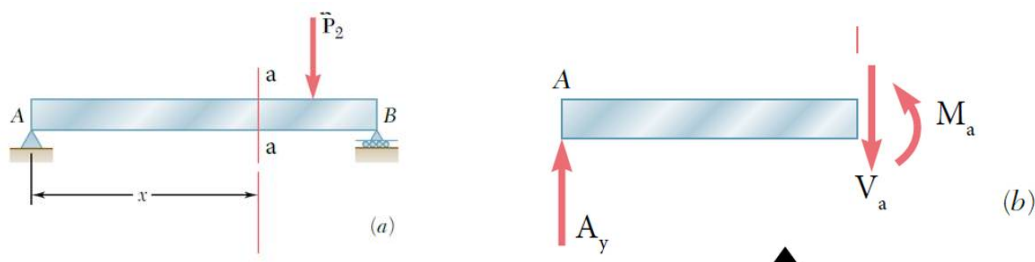
$$\text{I از معادله} \Rightarrow A_y + B_y = 30 \Rightarrow A_y + 15 = 30 \Rightarrow \boxed{A_y = 15 \text{ kN}}$$

جلسه یازدهم:

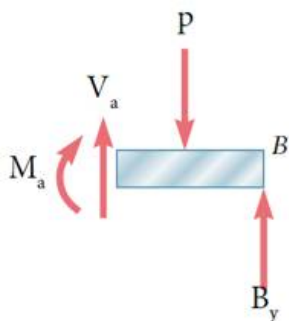
نیروهای داخلی در تیرها با بار متمرکز

هنگامی که تیر تحت تأثیر بار قرار می‌گیرد در هر نقطه از طول تیر نیروهایی به وجود می‌آیند که به آن‌ها نیروهای داخلی تیر می‌گویند. برای این که نیروهای داخلی در هر نقطه از تیر تعیین شود باید یک برش (مقطع) عمود بر محور تیر در آن نقطه در نظر گرفت و پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ یا راست مقطع مورد نظر را ترسیم نموده و با توجه به بحث تعادل اثر قطعه دیگر را بر روی آن اعمال کرد.

به عنوان مثال در شکل زیر در مقطع a-a خواهیم داشت:



و مطابق قانون سوم نیوتن همین اثر روی قطعه سمت راست و در جهت مخالف وجود دارد که در شکل زیر نشان داده شده است.

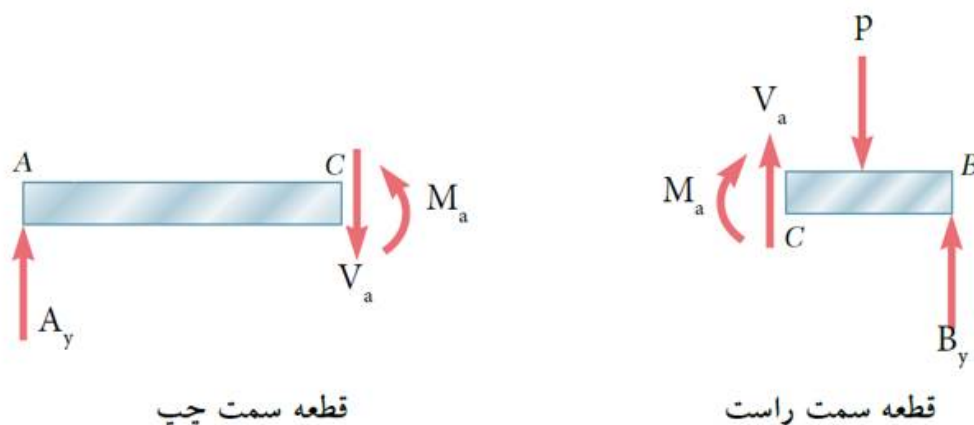


بنابراین نیروهای داخلی در هر مقطع از تیرها عبارتند از:

- ۱- نیروی برشی (V)
- ۲- لنگر خمشی (M)

علائم قرار دادی نیروهای داخلی تیرها

برای ایجاد یکنواختی در محاسبات نیروهای داخلی در مقاطع تیرها بهتر است جهت های مثبت نیروی برشی و لنگر خمشی را به صورت شکل زیر در نظر بگیریم.



محاسبه نیروهای داخلی تیرها با بار متمرکز

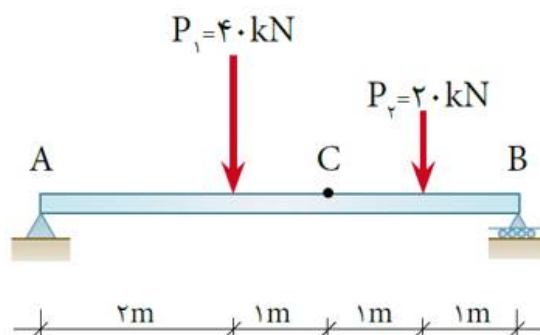
برای محاسبه نیروهای داخلی در هر مقطع، پس از ترسیم پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ یا راست آن مقطع و قرار دادن نیروی برشی V و لنگر خمشی M مطابق قرار داد فوق کافی است معادلات تعادل را برای مقطع مورد نظر تشکیل داده و اقدام به حل آن ها نماییم.

مثال:

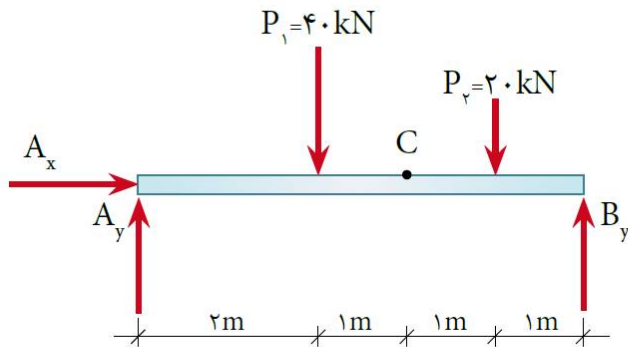
در تیر شکل مقابل مطلوب است:

الف) محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی

ب) محاسبه نیروی برشی و لنگر خمشی در مقطع C



گام ۱) ترسیم پیکر آزاد تیر:



گام ۲) محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی:

$$\sum \vec{F}_x^+ = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 40 - 20 = 0$$

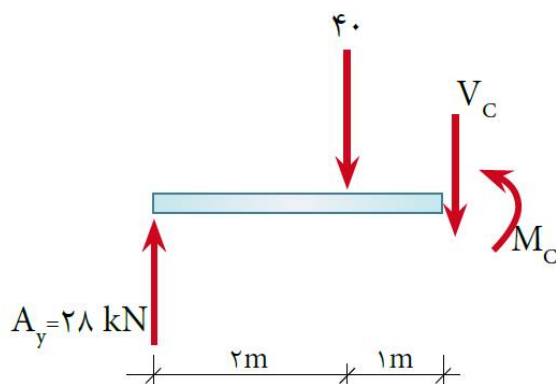
$$A_y + B_y = 60 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 40 \times 2 + 20 \times 4 - 6 B_y = 0$$

$$\boxed{B_y = 32 \text{ kN}}$$

$$\text{I از رابطه I} \Rightarrow A_y + 32 = 60 \Rightarrow \boxed{A_y = 28 \text{ kN}}$$

گام ۳) برای تعیین نیروهای داخلی در مقطع C، تیر را در این نقطه به دو قسمت تقسیم نموده و قطعه سمت چپ را مورد بررسی قرار می دهیم.



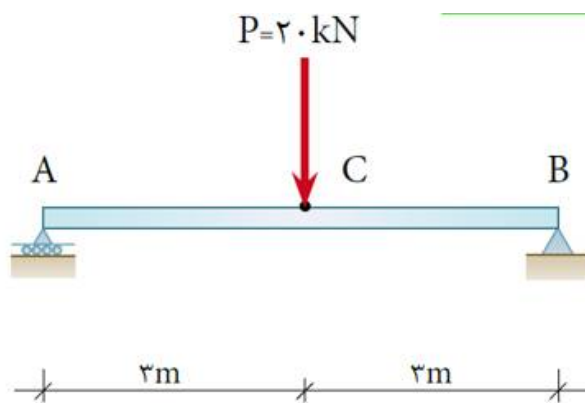
گام ۴) تشکیل معادلات تعادل و حل آن‌ها برای این قطعه

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 28 - 40 - V_c = 0 \Rightarrow \boxed{V_c = -12 \text{ kN}}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_c = 0 \Rightarrow 28 \times 3 - 40 \times 1 - M_c = 0$$

$$\boxed{M_c = 44 \text{ kN.m} \curvearrowright}$$

مثال:



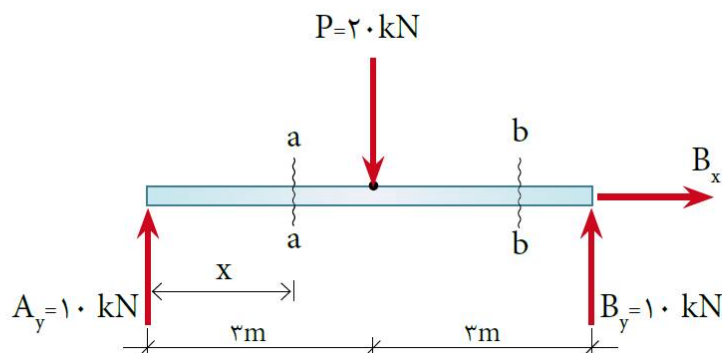
نمودارهای نیروی برشی و
لنگر خمشی تیر مقابل را
ترسیم نمائید.

۱- محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با توجه به تقارن تیر داریم:

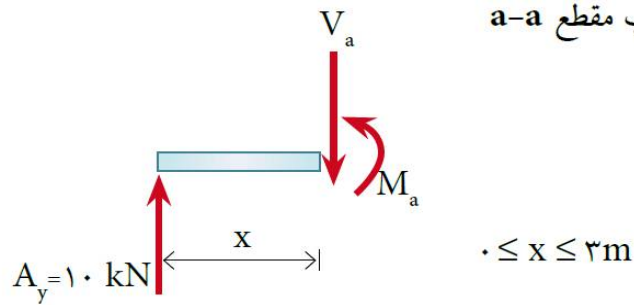
$$\overset{+}{\Sigma} \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0}$$

$$\boxed{A_y = B_y = \frac{20}{2} = 10 \text{ kN}}$$

۲- مقطع a-a به فاصله x از تکیه‌گاه A را در نظر گرفته و محدوده x را مشخص می‌نمائیم.



۳- ترسیم پیکر آزاد قطعه سمت چپ مقطع a-a



۴- با تشکیل معادلات تعادل برای قطعه فوق خواهیم داشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10 - V_a = 0$$

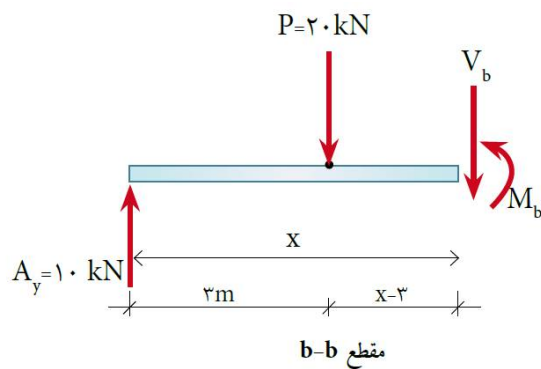
$$\boxed{V_a = 10 \text{ kN}} \quad \text{(I)} \quad 0 \leq x \leq 3\text{m} \quad \text{معادله نیروی برشی در محدوده}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_a = 0 \Rightarrow 10 \times x - M_a = 0$$

$$\boxed{M_a = 10 \times x} \quad \text{(II)} \quad 0 \leq x \leq 3\text{m} \quad \text{معادله لنگر خمشی در محدوده}$$

این معادلات مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در محدوده $0 \leq x \leq 3\text{m}$ مشخص می نمایند.

عملیات فوق را برای مقطع b-b در محدوده $3\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$ تکرار می نماییم. خواهیم داشت:



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10 - 20 - V_b = 0$$

$$\boxed{V_b = -10 \text{ kN}} \quad \text{(III)} \quad 3\text{m} \leq x \leq 6\text{m} \quad \text{معادله نیروی برشی در محدوده}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_b = 0 \Rightarrow 10 \times x - 20 \times (x - 3) - M_b = 0$$

$$M_b = 10 \cdot x - 20 \cdot (x - 3)$$

$$\boxed{M_b = 60 - 10 \cdot x} \quad \text{(IV)} \quad 3\text{m} \leq x \leq 6\text{m} \quad \text{معادله لنگر خمشی در محدوده}$$

۵- اکنون نمودار نیروی برشی را با استفاده از معادلات I و III ترسیم می‌نمائیم.

$$\text{(I)} \quad V_a = 10 \text{ kN} \quad 0 \leq x \leq 3\text{m}$$

$$\text{(III)} \quad V_b = -10 \text{ kN} \quad 3\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$$

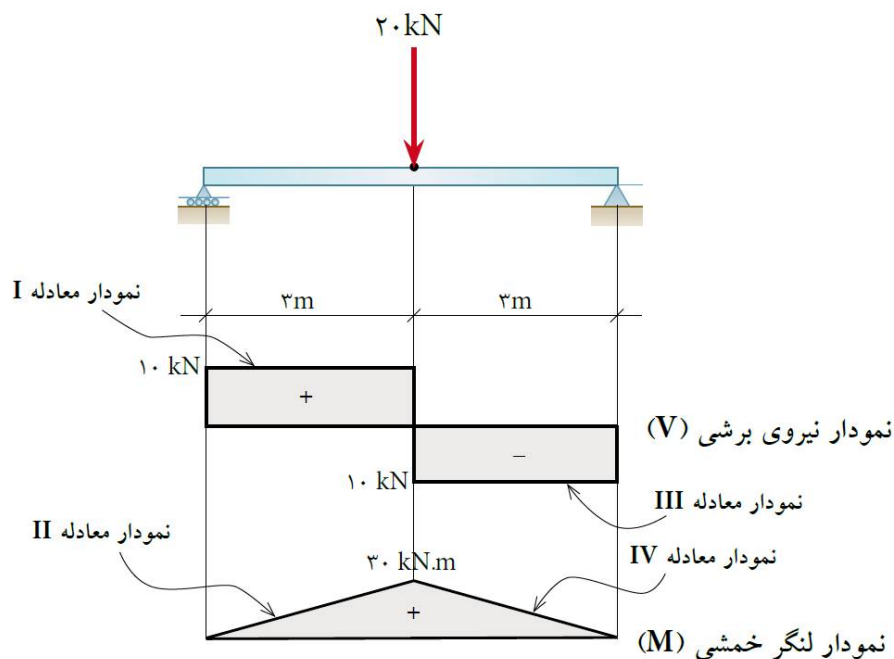
۶- نمودار لنگر خمشی را با استفاده از معادلات II و IV و به‌روش نقطه‌یابی در نقاط ابتدا و انتهای هر ناحیه ترسیم می‌کنیم.

$$\text{(II)} \quad M_a = 10 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 3\text{m}$$

x (m)	M(kN.m)
0	0
3	30

$$\text{(IV)} \quad M_b = 60 - 10 \cdot x \quad 3\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$$

x (m)	M(kN.m)
3	30
6	0



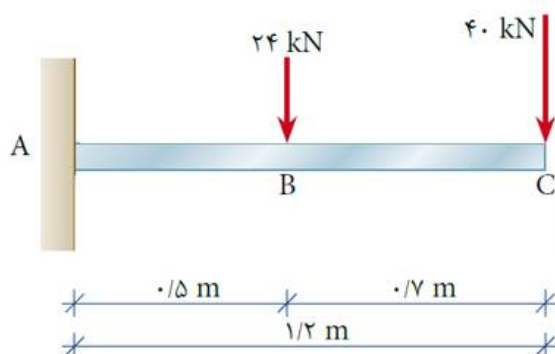
مثال:

در تیر شکل مقابل مطلوب است:

الف- ترسیم دیاگرام نیروی برشی تیر

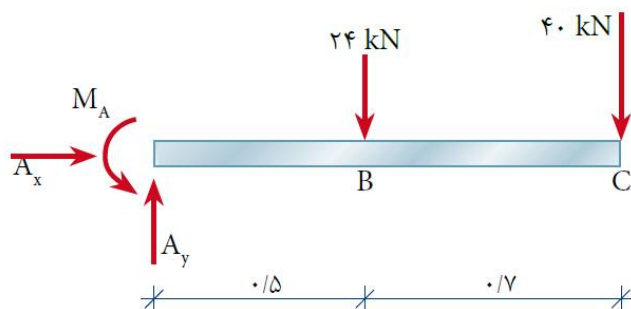
ب- ترسیم دیاگرام لنگر خمشی تیر

ج- تعیین نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر تیر.



حل:

الف) محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی

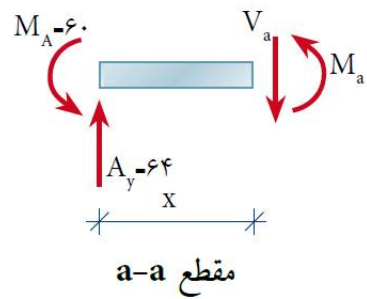
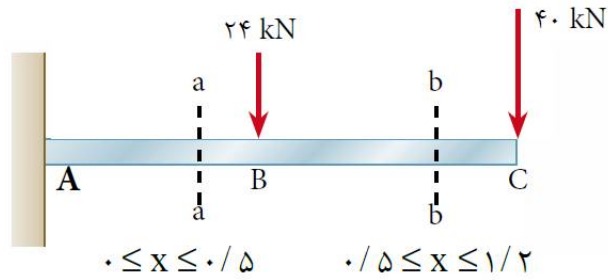


$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 24 - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 64 \text{ kN}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 24 \times 0.5 + 40 \times 1.2 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 60 \text{ kN.m}}$$

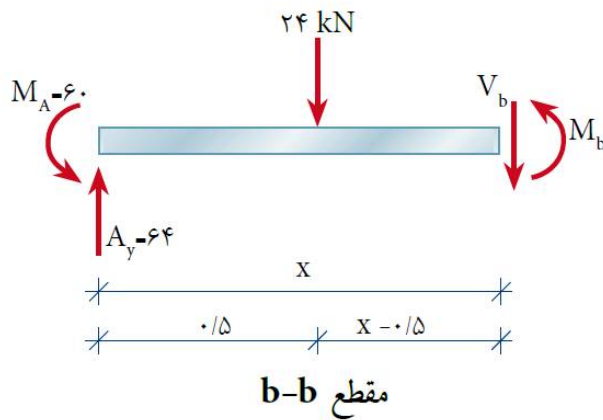
معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در ناحیه AB ($0 \leq x \leq 0.5$):



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 64 - V_a = 0 \Rightarrow \boxed{V_a = 64 \text{ kN}} \quad 0 \leq x \leq 0.5$$

$$+\circlearrowleft \sum M_a = 0 \Rightarrow -M_a + 64x - M_A = 0 \Rightarrow \boxed{M_a = 64x - 60}$$

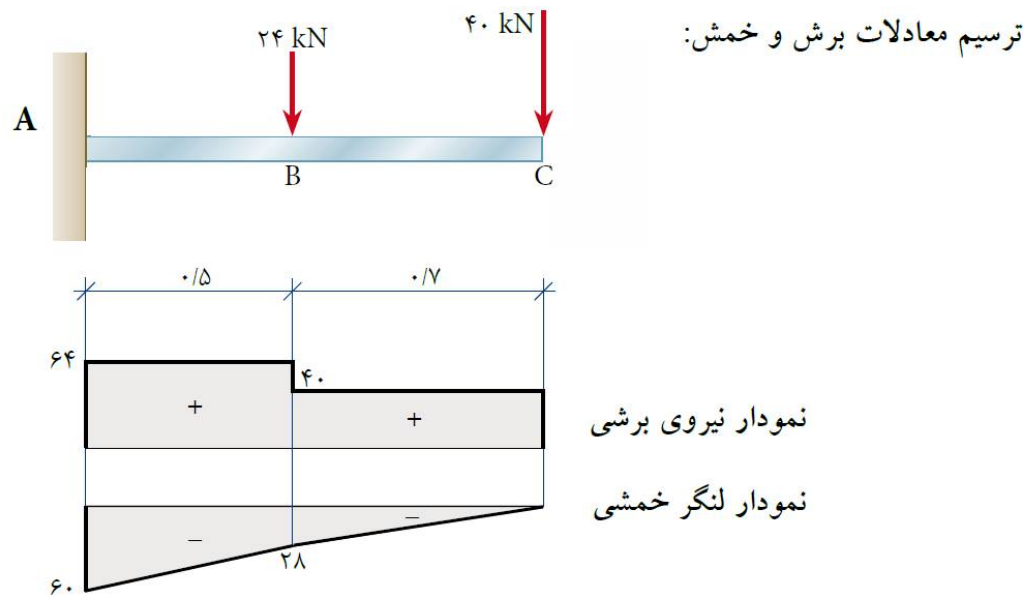
معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در ناحیه BC ($0.5 \leq x \leq 1.0$):



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 64 - 24 - V_b = 0 \Rightarrow \boxed{V_b = 40 \text{ kN}} \quad 0.5 \leq x \leq 1.5$$

$$\begin{aligned} \overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_b = 0 &\Rightarrow -M_b - M_A + 64 \times x - 24(x - 0.5) = 0 \\ \Rightarrow M_b &= 64x - 24(x - 0.5) - 60 \end{aligned}$$

$$\boxed{M_b = 40x - 48} \quad 0.5 \leq x \leq 1.5$$



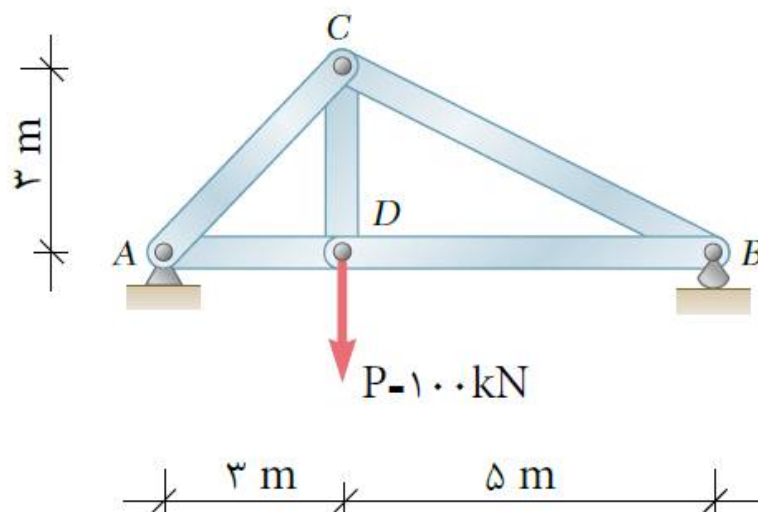
ج) با توجه به نمودار، حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در تکیه‌گاه قرار دارد و مقدار آن برابر است با:

$$\begin{aligned} V_{\max} &= 64 \text{ kN} \\ M_{\max} &= 60 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

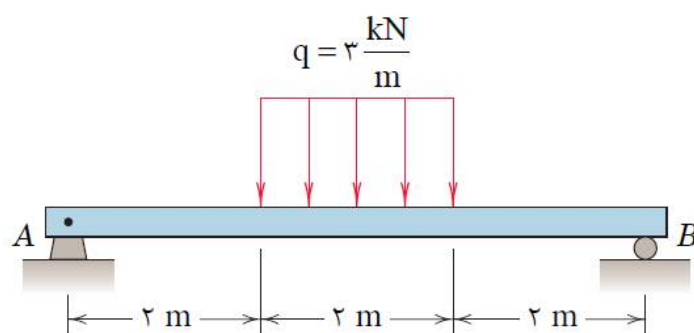
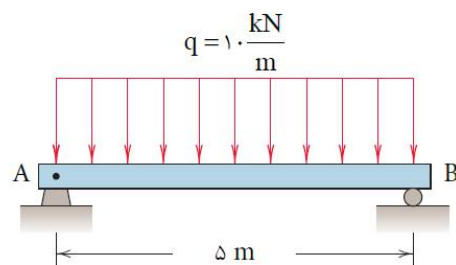
نتیجه: در تیرهای کنسولی حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در تکیه‌گاه به وجود می‌آید.

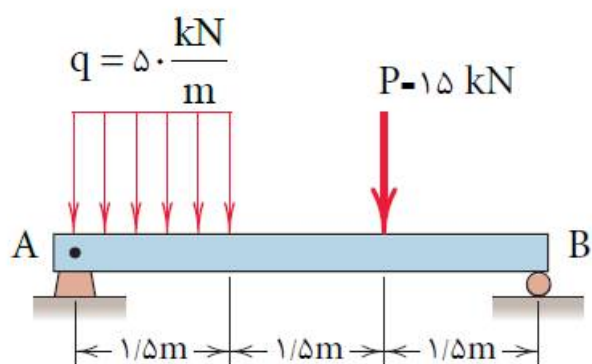
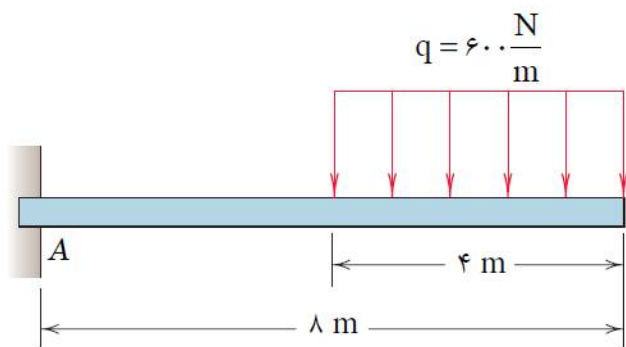
مثال ها:

در خرابای شکل زیر عکس العمل های تکیه گاهی را محاسبه نمایید.



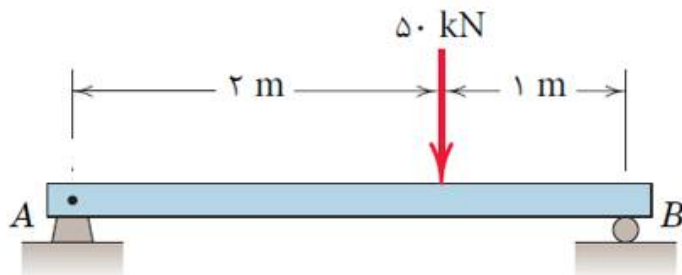
عکس العمل های تکیه گاهی تیرهای زیر را به دست آورید.

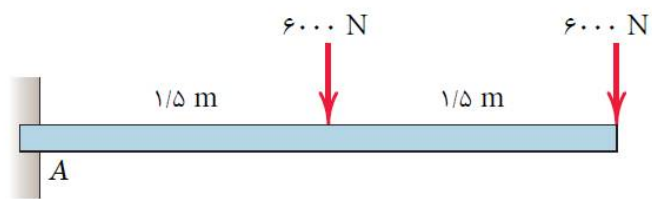
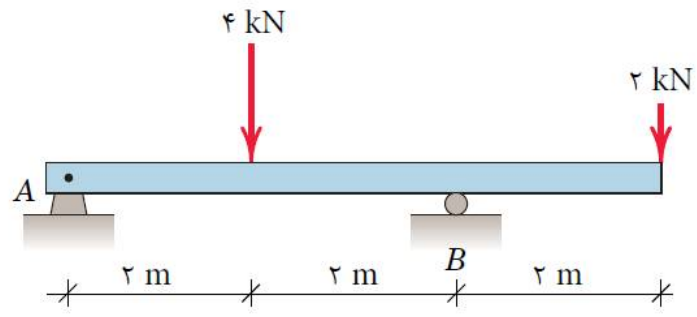




در تیرهای زیر مطلوب است:

- الف) ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی
 ب) تعیین محل لنگر خمشی حداکثر
 ج) تعیین مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی تیر





جلسه دوازدهم:

خواص هندسی سطوح

مقدمه:

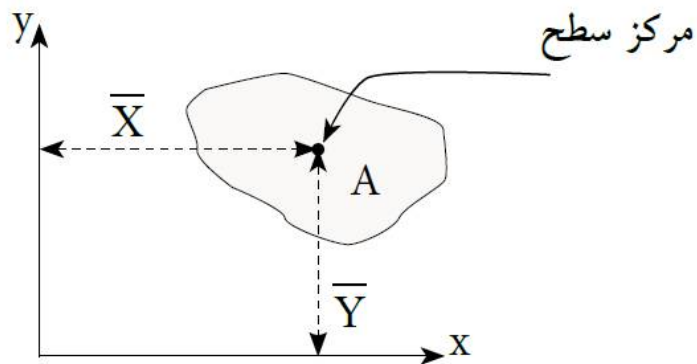
طول، سطح و حجم سه خصوصیت اصلی هندسی اجسام به شمار می‌روند. اجسام یک‌بعدی مانند طناب با طولشان، اجسام دو بعدی مانند یک قطعه زمین با مساحتشان و اجسام سه‌بعدی مثل یک ساختمان با حجمی که دارند مشخص می‌شوند. این خصوصیات تمام ویژگی‌های اجسام را بیان نمی‌کنند؛ مثلاً دو قطعه زمین هم‌مساحت ممکن است دارای شکل‌های هندسی متفاوت باشند. بنابراین اجسام دارای خصوصیات دیگری نیز می‌باشند که در این فصل به بررسی بعضی از خصوصیات سطوح شامل گشتاور اول سطح، مرکز سطح، گشتاور دوم سطح و مدول مقطع یا اساس مقطع آن‌ها می‌پردازیم.

گشتاور اول سطح (ممان استاتیک)

حاصل ضرب مساحت در فاصله مرکز آن تا محور مورد نظر.

گشتاور اول سطح با نماد Q نمایش داده می‌شود و واحد آن طول به توان ۳ می‌باشد یعنی m^3 و یا cm^3 و ...

در شکل زیر با توجه به تعریف داریم:



$$Q_x = A \cdot \bar{Y}$$

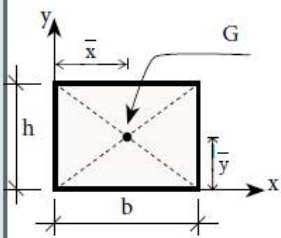
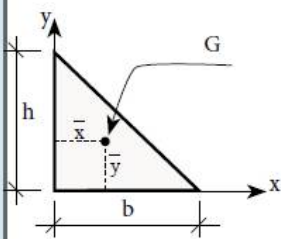
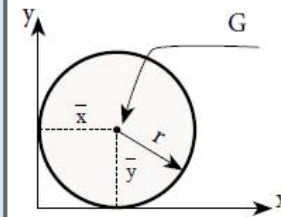
گشتاور اول سطح A نسبت به محور x

$$Q_y = A \cdot \bar{X}$$

گشتاور اول سطح A نسبت به محور y

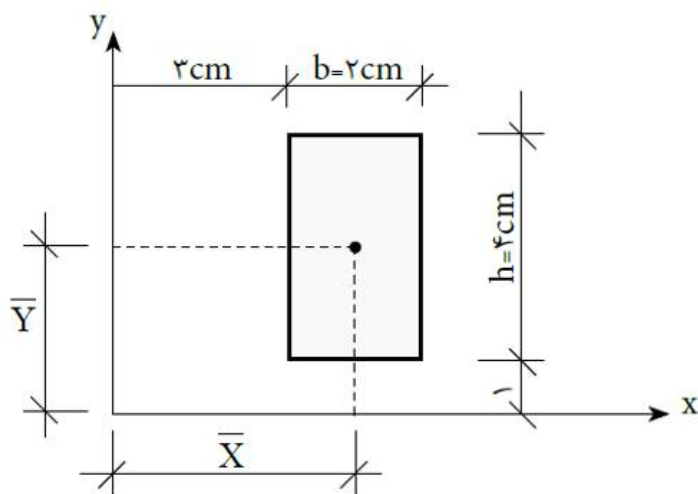
در روابط فوق $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مختصات مرکز سطح A می باشند.

در جدول زیر مختصات مرکز سطح بعضی از سطوح هندسی نسبت به محورهای X و Y آمده است.

نام سطح	شکل هندسی	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	توضیحات
مستطیل (مربع)		$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	مرکز سطح مستطیل محل تلاقی دو قطر آن می باشد
مثلث قائم الزاویه		$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	مرکز سطح مثلث قائم الزاویه در فاصله $\frac{1}{3}$ از قاعده آن می باشد
دایره		r	r	مرکز سطح دایره مرکز دایره می باشد

مثال:

گشتاور اول سطح (ممان استاتیک) مستطیل را نسبت به محورهای x و y محاسبه کنید.



با توجه به شکل فاصله مرکز سطح از محورهای x و y عبارتند از:

$$\bar{X} = \frac{b}{2} + 3 \Rightarrow \bar{X} = \frac{2}{2} + 3 = 4 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{h}{2} + 1 \Rightarrow \bar{Y} = \frac{4}{2} + 1 = 3 \text{ cm}$$

$$A = b.h = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}^2 \quad \text{مساحت مستطیل برابر است با}$$

$$Q_x = A.\bar{Y} \Rightarrow Q_x = 8 \times 3 = 24 \text{ cm}^3 \quad \text{ممان استاتیک نسبت به محور } x$$

$$Q_y = A.\bar{X} \Rightarrow Q_y = 8 \times 4 = 32 \text{ cm}^3 \quad \text{ممان استاتیک نسبت به محور } y$$

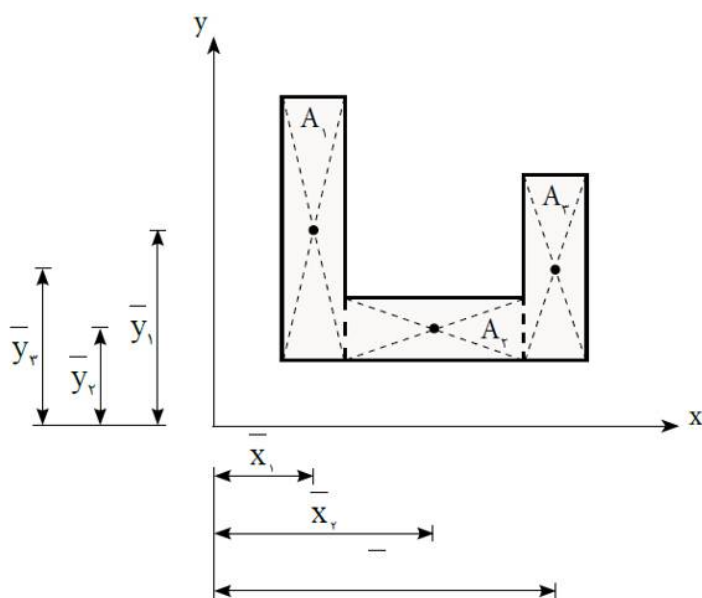
گشتاور اول (ممان استاتیک) سطوح مرکب

به منظور محاسبه گشتاور اول سطوح مرکب، آن‌ها را به سطوح هندسی ساده تجزیه نموده و ممان استاتیک هر یک از آن‌ها را نسبت به محورهای مورد نظر محاسبه و با یکدیگر جمع جبری می‌نمائیم. یعنی:

$$Q_x = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i$$

به عنوان مثال در شکل زیر خواهیم داشت:

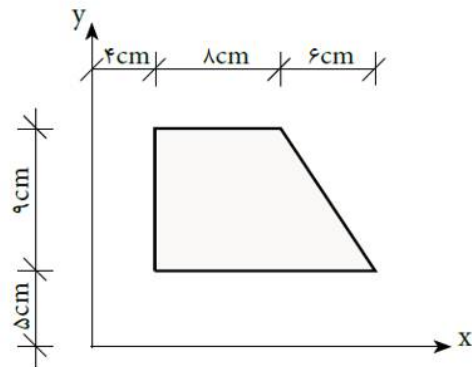


$$Q_x = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \Rightarrow Q_x = A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 + A_3 \bar{y}_3$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i \Rightarrow Q_y = A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3$$

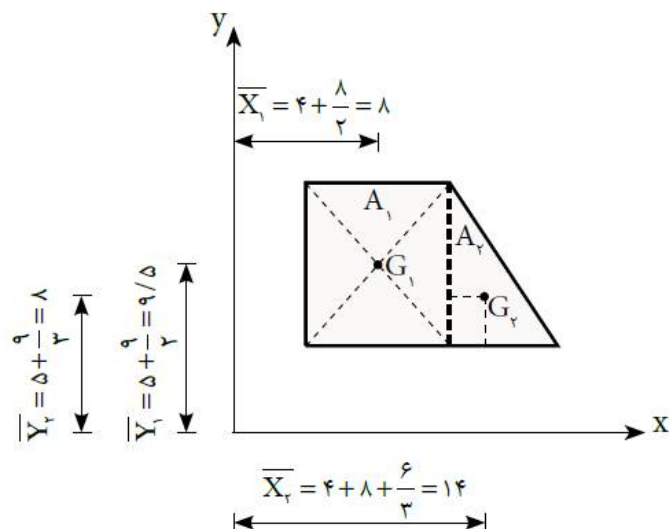
مثال:

گشتاور اول سطح داده شده را نسبت به محورهای X و Y محاسبه کنید.



حل:

سطح مرکب داده شده را مطابق شکل زیر به دو سطح ساده مستطیلی و مثلثی تجزیه می کنیم.



سطوح	مساحت (A_i) cm^2	$\bar{x}$ cm	$\bar{y}$ cm	$Q_x = A\bar{y}_i$ cm^3	$Q_y = A\bar{x}_i$ cm^3
A_1	$8 \times 9 = 72$	8	9/5	$72 \times 9/5 = 648$	$72 \times 8 = 576$
A_2	$\frac{6 \times 9}{2} = 27$	14	8	$27 \times 8 = 216$	$27 \times 14 = 378$
Σ				1400	954

بنابراین:

$$Q_x = 1400 \text{ cm}^3$$

$$Q_y = 954 \text{ cm}^3$$

مرکز سطح سطوح مرکب

برای محاسبه مرکز سطح سطوح مرکب با توجه به این که گشتاور اول کل سطح با مجموع گشتاورهای اول اجزای سطح مرکب با هم برابرند می توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} Q_y = A\bar{X} \\ Q_y = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i \end{array} \right\} \Rightarrow A\bar{X} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$$

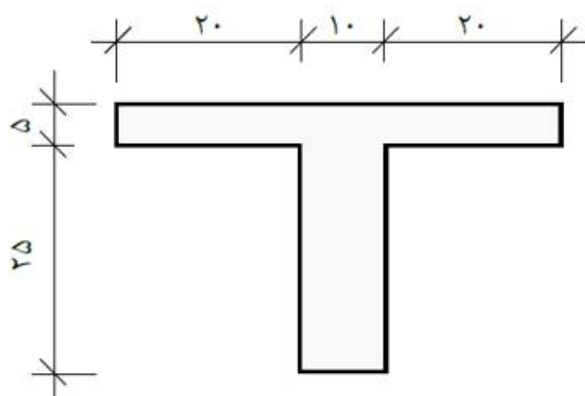
$$\left. \begin{array}{l} Q_x = A\bar{Y} \\ Q_x = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \end{array} \right\} \Rightarrow A\bar{Y} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \Rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$$

در روابط فوق $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مختصات مرکز سطح مرکب مورد نظر می باشند که نسبت به محورهای مختصات دلخواه تعیین می شوند.

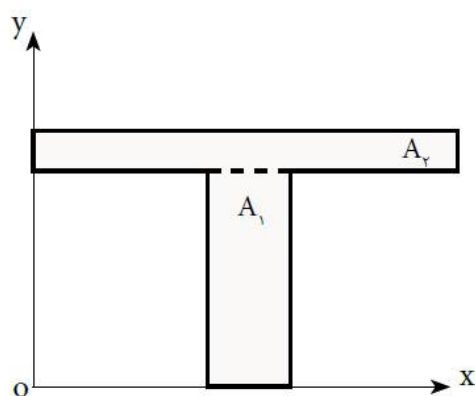
مثال:

مختصات مرکز سطح شکل زیر را محاسبه نمایید.

(ابعاد شکل بر حسب cm است)



به منظور سادگی حل مسئله محورهای مختصات x و y را طوری در نظر می‌گیریم که شکل در ربع اول دستگاه مختصات قرار گرفته و تمام طول‌ها مثبت باشند.

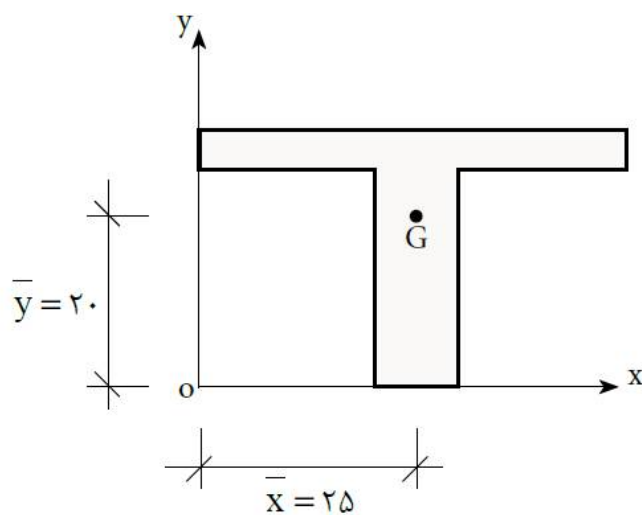


سطوح	مساحت (A_i) cm ^۲	$\bar{x}_i$ cm	$\bar{y}_i$ cm	$Q_x = A_i \bar{y}_i$ cm ^۳	$Q_y = A_i \bar{x}_i$ cm ^۳
A_1	$10 \times 25 = 250$	$20 + \frac{10}{2} = 25$	$\frac{25}{2} = 12.5$	3125	6250
A_2	$5 \times 50 = 250$	$\frac{50}{2} = 25$	$25 + \frac{5}{2} = 27.5$	6875	6250
Σ	500			10000	12500

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{12500}{500} = 25 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{10000}{500} = 20 \text{ cm}$$

در شکل زیر مختصات مرکز سطح نشان داده شده است:



$$G \begin{cases} 25 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases}$$

استفاده از تقارن در تعیین مرکز سطح سطوح متقارن

محور تقارن خطی است که سطح را به دو قسمت مساوی وقرینه تقسیم می کند.

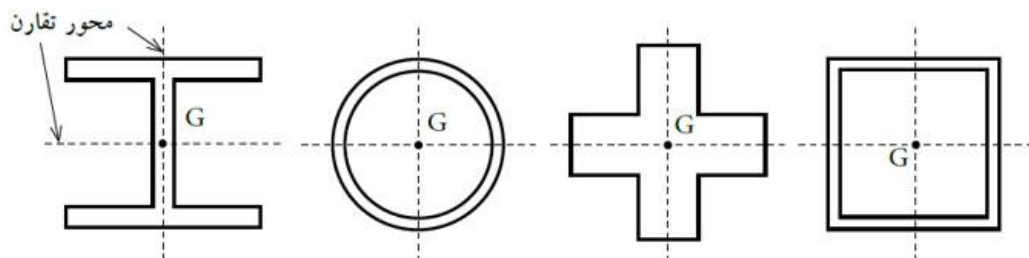
سطوح با یک محور تقارن

اگر سطح دارای یک محور تقارن باشد، مرکز سطح روی آن محور خواهد بود.



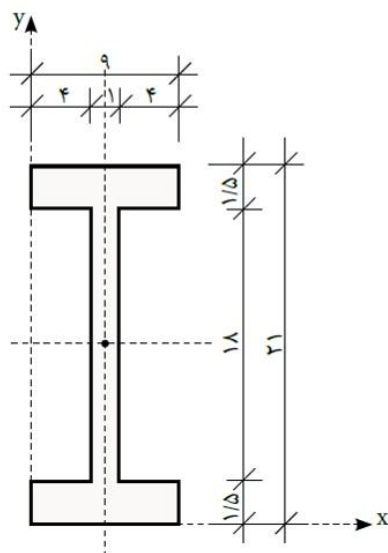
سطوح با دو محور تقارن:

هرگاه سطح دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح در محل تلاقی آن دو محور خواهد بود.



مثال:

در شکل زیر با استفاده از تقارن مختصات مرکز سطح را به دست آورید.
(ابعاد بر حسب سانتی متر می باشد)



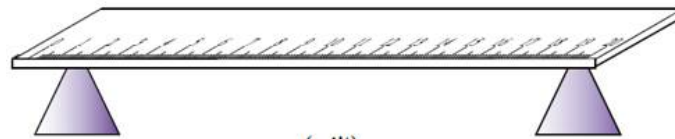
باتوجه به این که شکل دارای دوممحور تقارن می باشد لذا مرکز سطح محل تلاقی آنها خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\bar{x} = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ cm}$$

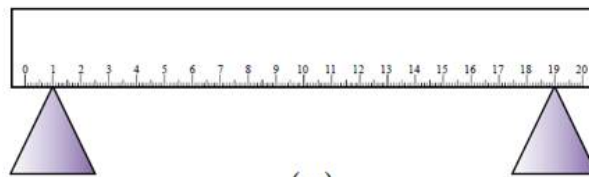
$$\bar{y} = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ cm}$$

گشتاور دوم سطح (ممان اینرسی) (Moment of Inertia)

خط کشی را مطابق شکل زیر در نظر می گیریم اگر بخواهیم آن را در دو حالت نشان داده شده خم کنیم به نظر شما در کدام حالت راحت تر خم می شود؟ چرا؟



(الف)



(ب)

باتوجه به مثال فوق درمی یابیم علی رغم آن که سطح مقطع خط کش در هر دو حالت یکسان است در حالت (الف) خط کش راحت تر خم می شود. یعنی مقاومت آن در مقابل خم شدن (خمش) کمتر از حالت (ب) می باشد. علت آن ممان اینرسی سطح مقطع خط کش است که در حالت (الف) کمتر از حالت (ب) می باشد.

به عنوان یک تعریف ساده از ممان اینرسی، می توان گفت:

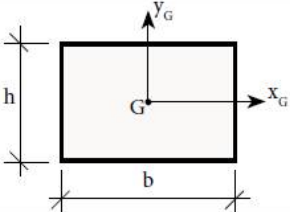
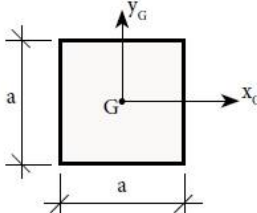
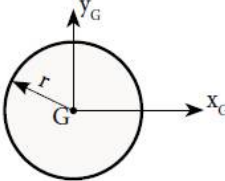
گشتاور دوم سطح یا ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش می باشد و به توزیع ذرات تشکیل دهنده جسم حول محور خمش بستگی دارد.

ممان اینرسی را با نماد I نشان داده و نسبت به محورهای مختلف با اندیس آن محور

نام گذاری می شود. به عنوان مثال، I_x یعنی ممان اینرسی نسبت به محور x .

واحد ممان اینرسی، طول به توان ۴ یعنی cm^4 یا mm^4 و ... می باشد.

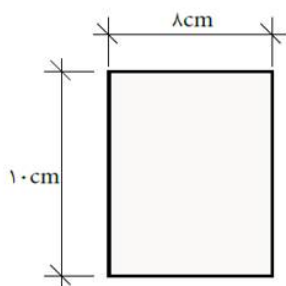
در جدول زیر روابط ممان اینرسی بعضی از سطوح هندسی ساده نسبت به محورهای مرکزی آن ها آمده است.

نام سطح	شکل هندسی	I_{x_G}	I_{y_G}
مستطیل		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
مربع		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$
دایره		$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$

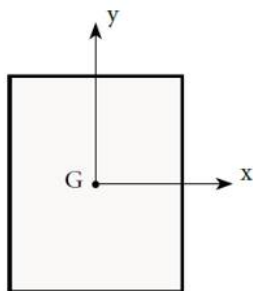
مثال:

ممان اینرسی سطح مقطع مقابل را نسبت به محورهای مرکزی آن محاسبه نمایید.

حل:



مرکز سطح مستطیل محل تلاقی دو قطر آن می باشد بنابراین:



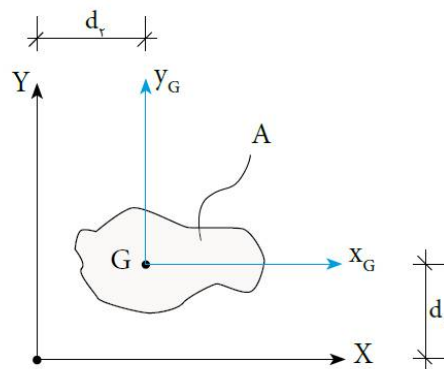
$$I_{xG} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \times 10^3}{12} = 666.67 \text{ cm}^4$$

$$I_{yG} = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \times 8^3}{12} = 426.67 \text{ cm}^4$$

قضیه محوره‌های موازی:

در قسمت قبل روش تعیین ممان اینرسی یک سطح نسبت به محور هایی که از مرکز آن سطح می گذرد ، را دیدیم.
حال می خواهیم ممان اینرسی یک سطح را نسبت به محورهایی که موازی محوره‌های مرکزی آن می باشند، به دست آوریم.

به عنوان مثال در شکل زیر با فرض اینکه ممان اینرسی آن نسبت به محوره‌های مرکزی (x_G و y_G) معلوم باشد، می خواهیم ممان اینرسی مقطع را نسبت به محوره‌های X و Y که با فاصله d_x و d_y از محوره‌های مرکزی قرار دارند، محاسبه کنیم.



این موضوع با قضیه محوره‌های موازی که به صورت زیر بیان می شود قابل محاسبه خواهد بود.

ممان اینرسی یک سطح نسبت به محورهایی که موازی با محوره‌های مرکزی آن سطح می باشند، برابر است با ممان اینرسی آن سطح نسبت به محوره‌های مرکزی به اضافه حاصل ضرب مساحت در مجذور فاصله محور مورد نظر تا مرکز سطح.

یعنی:

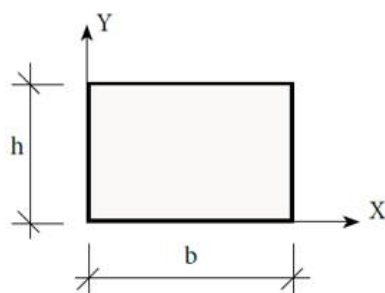
$$I_X = I_{x_G} + Ad_y^2$$

$$I_Y = I_{y_G} + Ad_x^2$$

مثال:

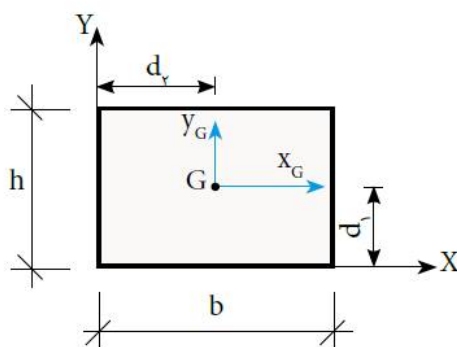
در شکل روبه‌رو مطلوب است:

محاسبه I_x و I_y



حل:

الف) ابتدا ممان اینرسی را نسبت به محورهای مرکزی آن یعنی x_G و y_G تعیین می‌کنیم.



$$I_{xG} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yG} = \frac{hb^3}{12}$$

ب) با توجه به این که محور X بر طول مستطیل مماس می‌باشد، فاصله آن از محور x_G یعنی d_1 برابر است با:

$$d_1 = \frac{h}{2}$$

$$A = b.h$$

$$I_X = I_{xG} + Ad_1^2 \Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{12} + (b.h)\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} \Rightarrow I_X = \frac{bh^3 + 3bh^3}{12}$$

$$I_X = \frac{4bh^3}{12} \Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{3}$$

ج) برای محور Y نیز خواهیم داشت:

$$d_y = \frac{b}{2}$$

$$A = b.h$$

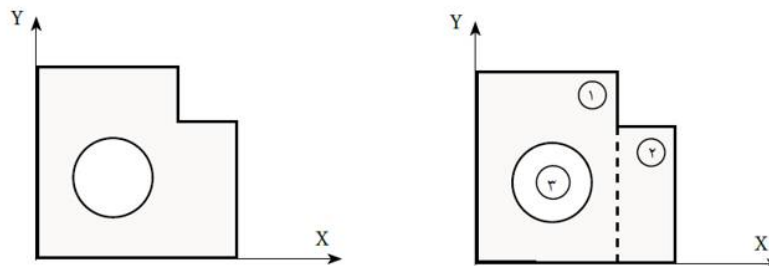
$$I_Y = I_{YG} + Ad_y^2 \Rightarrow I_Y = \frac{hb^3}{12} + (b.h)\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_Y = \frac{hb^3}{12} + \frac{hb^3}{4} \Rightarrow I_Y = \frac{hb^3 + 3hb^3}{12}$$

$$I_Y = \frac{4hb^3}{12} \Rightarrow I_Y = \frac{hb^3}{3}$$

محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب:

برای محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب، آن‌ها را به اشکال هندسی ساده تجزیه نموده و ممان اینرسی هر یک را نسبت به محور مورد نظر محاسبه و با یکدیگر جمع جبری می‌نماییم.



$$I_X = I_{X1} + I_{X2} - I_{X3}$$

$$I_Y = I_{Y1} + I_{Y2} - I_{Y3}$$

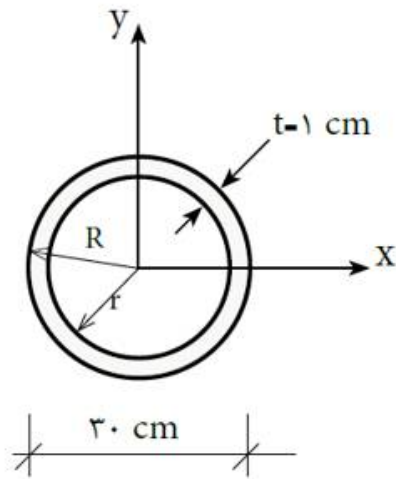
و به طور کلی خواهیم داشت:

$$I_X = \sum_{i=1}^n I_{Xi} = \sum_{i=1}^n (I_{X_{Gi}} + A_i d_i^2)$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n I_{Yi} = \sum_{i=1}^n (I_{Y_{Gi}} + A_i d_i^2)$$

مثال:

در شکل زیر مطلوب است محاسبهٔ ممان اینرسی نسبت به محوره‌های X و Y.



$$R = \frac{30}{2} = 15$$

$$r = R - t \Rightarrow r = 15 - 1 \Rightarrow r = 14 \text{ cm}$$

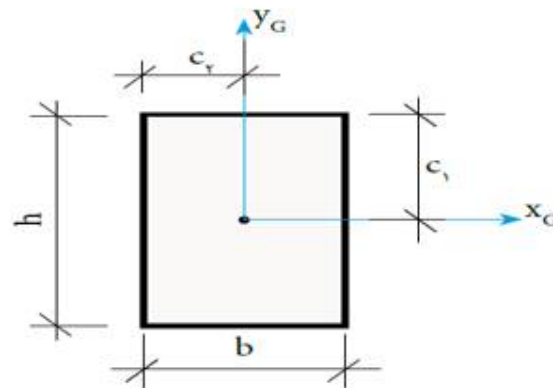
$$I_x = I_y = I_{\text{خارجی}} - I_{\text{داخلی}}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4} (15^4 - 14^4)$$

$$I_x = I_y = 9588 / 93 \text{ cm}^4$$

مدول مقطع (اساس مقطع) (Section Modulus)



$$S_{x_G} = \frac{I_{x_G}}{c_x}$$

در این رابطه داریم:

S_{x_G} : مدول مقطع یا اساس مقطع نسبت به محور x_G

I_{x_G} : ممان اینرسی سطح نسبت به محور x_G

C_1 : فاصله دورترین تار تحتانی یا فوقانی سطح نسبت به محور مرکزی (x_G) می باشد

که در مقاطع متقارن برابر نصف کل ارتفاع مقطع می باشد. یعنی:

$$c_1 = \frac{h}{2}$$

و برای محور y نیز رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$S_{y_G} = \frac{I_{y_G}}{c_y}$$

S_{y_G} : مدول مقطع یا اساس مقطع نسبت به محور y_G

I_{y_G} : ممان اینرسی سطح نسبت به محور y_G

C_y : فاصله دورترین تار سمت چپ یا راست مقطع نسبت به محور مرکزی (y_G)

می باشد که در مقاطع متقارن برابر نصف پهنای مقطع است. یعنی:

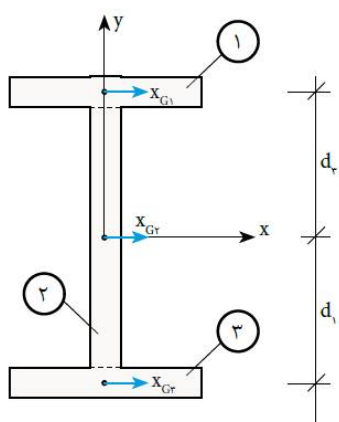
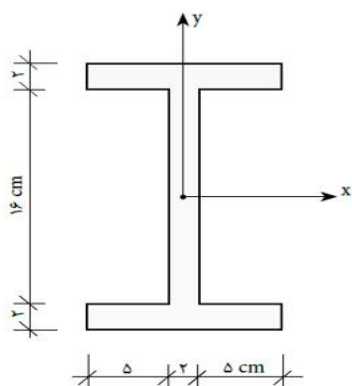
$$c_y = \frac{b}{2}$$

مثال:

در شکل روبه‌رو مطلوب است:

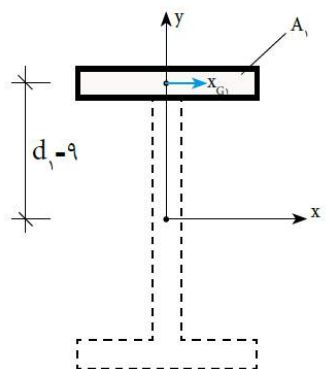
الف) محاسبه I_x

ب) محاسبه S_x



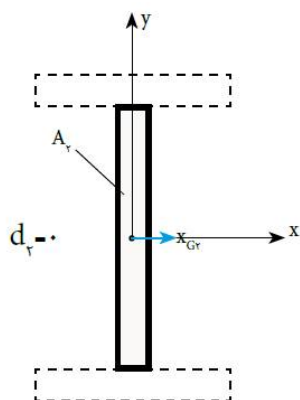
- ابتدا سطح مقطع را به سه سطح ۱، ۲ و ۳ تجزیه می‌کنیم.

- به کمک قضیه محوره‌های موازی ممان اینرسی هریک از سطوح را نسبت به محور x محاسبه می‌کنیم.
محاسبه I_{x1} :



$$I_{x1} = I_{xG1} + A_1 d_1^2$$

$$I_{x1} = \frac{12 \times 2^3}{12} + (2 \times 12)(9)^2 = 1952 \text{ cm}^4$$

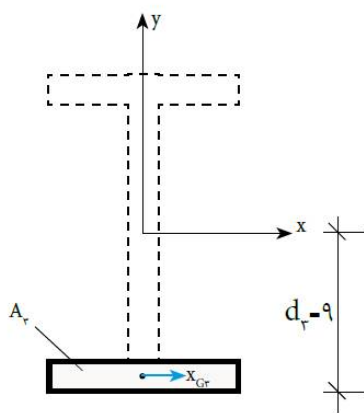


محاسبه I_{x_y} :

$$I_{x_y} = I_{x_{G_y}} + A_y d_y^2$$

$$I_{x_y} = \frac{2 \times 16^3}{12} + (2 \times 16)(8)^2$$

$$I_{x_y} = 682/67 \text{ cm}^4$$



محاسبه I_{x_y} :

به دلیل تقارن A_y و A_x نسبت به محور x داریم:

$$I_{x_y} = I_{x_1} = 1952 \text{ cm}^4$$

ممان اینرسی کل مقطع برابر است با:

$$I_x = \sum_{i=1}^3 I_{x_i} = I_{x_1} + I_{x_y} + I_{x_r}$$

$$I_x = 1952 + 682/67 + 1952$$

$$I_x = 4586/67 \text{ cm}^4$$

مدول مقطع نسبت به محور x را به دست می آوریم.

به دلیل تقارن، مقطع C_1 برابر است با نصف کل ارتفاع مقطع یعنی:

$$c_1 = \frac{h}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$S_x = \frac{I_x}{c_1} \Rightarrow S_x = \frac{4586/67}{10}$$

$$S_x = 458/67 \text{ cm}^3$$