

سوالی

حصه‌ای (۹۹، ۱، ۲۰)

حله ششم

ریاضی عمومی ۲

قاعده زنجیره‌ای برای توابع دو متغیره

در فصل ۲، از قاعده زنجیره‌ای جهت می‌استفاد کردیم. $w = f(u)$ تابع

متغیر پذیر از u بوده و $u = g(t)$ تابع متغیر پذیر از t . این خاصیت

نسب می‌شود که w تابع متغیر پذیر از t در قاعده زنجیره‌ای بیان

می‌شود. $\frac{dw}{dt}$ استوار از متغیر t محاسبه است.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

متغیر w لاجرم برای توابع دو متغیره $w = f(u, v)$ می‌توان بیان کرد.

قاعده زنجیره‌ای برای توابع دو متغیره: فرض کنید $w = f(u, v)$ متغیر پذیر بوده.

و u و v توابع متغیر پذیر از t باشند. در این صورت w تابع

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

فصل ۱۰، استاندارد از مباحث ریاضیاتی

$$w = xy$$

رابطه t را قرار می‌دهیم $y = \sin t$ و $x = \cos t$ در $t = \frac{\pi}{4}$

تقریباً در $t = \frac{\pi}{4}$ محاسبه می‌شود.

حل داریم

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

سپاریم داریم

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= y \cdot (-\sin t) + x \cdot (\cos t)$$

$$\stackrel{\text{مقادیر را قرار می‌دهیم}}{\text{در } t = \frac{\pi}{4}} = \sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t$$

$$= -\sin^2 t + \cos^2 t$$

در $t = \frac{\pi}{4}$ قرار می‌دهیم

$$\frac{dw}{dt} = -\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 + 1 = 0$$

قانون زنجیره‌ای برای مشتق

اگر $w = f(x, y, z)$ و x, y, z توابعی باشند که به t وابسته باشند
 آنگاه مشتق w به t برابر است با:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

مثال ۱:

$$w = x^2y + z$$

و $x = \cos t$ ، $y = \sin t$ ، $z = t$. مطلوب است $\frac{dw}{dt}$

تقریباً در $t = 0$ بدست آورید.

حل:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$= y \cdot (-\sin t) + x \cdot (\cos t) + 1$$

مقادیر را جایگزین می‌کنیم:

$$= (\sin t) \cdot (-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1$$

$$= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1$$

۲، $\frac{dw}{dt} = -0 + 1 + 1 = 2$

مقادیر $t = 0$ را جایگزین می‌کنیم.

قاعده زنجیره‌ای برای دو متغیر مستقل و سه متغیر وابسته:

فرض کنید $w = f(x, y, z)$ و

$$x = g(r, s), \quad y = h(r, s), \quad z = k(r, s)$$

اگر هر چهار تابع مشتق پذیر باشند، آنگاه w دارای مشتقات جزئی نسبت به

r و s می باشد. با فرض این که متغیرهای مستقل r و s هستند:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم

$$w = x + y^2 + z^2, \quad x = \frac{r}{s}, \quad y = r^2 + \ln s, \quad z = 2r$$

در این صورت مطلوب است محاسبه

$$\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial s}$$

حل: داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = r, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = rz$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{s}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = r, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = r$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{r}{s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{s}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

برای چهارم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= 1 \times \frac{1}{s} + r \times r + rz \times r \\ &= \frac{1}{s} + r^2 + rz^2 \end{aligned}$$

برای پنجم: $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{s} + r^2 + r \times \left(-\frac{r}{s}\right) = \frac{1}{s} + rz^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 1 \times \left(-\frac{r}{s}\right) + r \times \frac{1}{s} + rz \times 0 \\ &= -\frac{r}{s} + \frac{r}{s} \end{aligned}$$

مثال ۴: فرض کنید داشته باشیم

$$w = x^2 + y^2, \quad x = r - s, \quad y = r + s$$

مطلوب است $\frac{\partial w}{\partial r}$ و $\frac{\partial w}{\partial s}$

حل: داریم

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 1$$

پس داریم

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = 2x \times 1 + 2y \times 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 2x(r-s) + 2(r+s)$$

و

$$= 2r - 2s + 2r + 2s = 4r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= 2x \times (-1) + 2y \times (1)$$

تأثیرهای
سایر روی

$$= -2(r-s) + 2(r+s)$$

$$= -2r + 2s + 2r + 2s = 4s$$

نکته: اگر $w = f(x)$ ، $x = g(r, s)$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}$$

مثال: فرض کنید

$$w = 2x \quad , \quad x = r^2 + s^2$$

در این صورت

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} = 2x \cdot 2r = 4r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = 2x \cdot 2s = 4s$$

شتق گیری ضمنی :

قاعده زنجیره‌ای در مورد معادله دو متغیره منجر به فرمول شتق گیری تابع ضمنی می‌شود :

فرض کنید $F(x, y)$ شتق ندریروز و معادله $F(x, y) = 0$ بتغیر لایه عنوان

تابع شتق ندری از x تعریف کند. در این صورت در هر نقطه‌ای $F_y \neq 0$

داریم :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y}$$

جایی که F_x شتق تابع F نسبت به x و F_y شتق تابع F نسبت به y است.

مثال : قطعات محاسب $\frac{dy}{dx}$ هر $x^2 + \sin y - 2y = 0$

حل : داریم $F(x, y) = x^2 + \sin y - 2y = 0$ در این صورت

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y} = - \frac{2x}{\cos y - 2}$$

$$F_x = 2x \quad , \quad F_y = \cos y - 2$$

۱