

به تالی

(جبرانی ۱۲، ۹۹)

حل می

رایت است

فصل دوم: روابط و توابع

تعریف مجموعه: دسته‌ای از اشیاء، اعداد، ... که به یک نماد مشخص و متمایز باشند را مجموعه می‌نامیم.

مثال ۱: کلمه ab از حروف الفبای فارسی تشکیل شده است.

۱- دانش آموزان سال آینده ایران $\times$ (چون تعداد اعضا مشخص نیست)

۲- دانش‌آموزان باهوش ایران $\times$ (چون باهوشی نسبی است)

۳- سید در صورتی $\times$ (چون اعضا دقیقاً مشخص نیست).

۴- اعداد اول یک رقمی $\checkmark$

برای هر مجموعه A عناصر A عدد اصلی یا اندازه یک مجموعه را $|A|$

نشان می‌دهیم و آنرا k در A می‌نامیم.

مثال ۲: دو مجموعه را برابر نشان دهید

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow |A| = 4$$

$$B = \{a, b, c, d, e\} \rightarrow |B| = 5$$

حاصل ضرب دکارتی مجموعه ها

برای دو مجموعه A, B حاصل ضرب دکارتی یا ضرب خارجی دو مجموعه B, A را به این صورت تعریف می کنند:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

مثال ۳: نشان دهید

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y, z\} \text{ را در نظر بگیرید}$$

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z), (3, x), (3, y), (3, z)\}$$

مجموعه حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را به صورت مرتب می گویند

نکته: اگر $(a, b), (c, d) \in A \times B$ داریم

$$(a, b) = (c, d) \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

مثال: اگر A و B دو مجموعه نهایی باشند، داریم:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

مثال ۱: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2\}$ باشند، داریم:

$$|A| = 3, |B| = 2 \Rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \times 2 = 6$$

سوال: آیا حاصلضرب دکارتی $A \times B$ برابر با حاصلضرب دکارتی $B \times A$ است؟

پاسخ: خیر، زیرا برای دو مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2\}$ داریم:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$A \times B \neq B \times A \quad \text{نادران}$$

نتیجه: حاصلضرب دکارتی مجموعه ها، خاصیت جابجایی ندارد.

تعریف رابطه:

هر زیر مجموعه از ضرب کاردانی $A \times B$ را رابطه‌ای از A به B می‌نامند و اگر با

R نمایش می‌دهیم.

اگر R رابطه‌ای از A به B باشد آنرا R مجموعه‌ای از زوج‌ها مرتب است

که در آن عضو اول زوج مرتب متعلق به مجموعه A و عضو دوم زوج مرتب متعلق به مجموعه B می‌باشد.

مثال (۵) فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{x, y\}$ در این صورت

$$R = \{(1, x), (3, x), (2, y)\} \subset A \times B$$

یک رابطه است.

نکته: به طور کلی برای مجموعه‌ها متناهی A و B با $|A| = m$ و $|B| = n$

تعداد 2^{mn} رابطه از A به B وجود دارد.

به عنوان مثال، در مثال ۵،

$$A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow |A| = 3$$

$$B = \{4, 8\} \Rightarrow |B| = 2$$

$$\text{مادرین} \quad 2^{3 \times 2} = 2^2 = 2^4$$

رابطه از $A \times B$ ، محدود دارد.

انواع غایب رابطه:

۱- غایب به صورت رابطه ریاضی

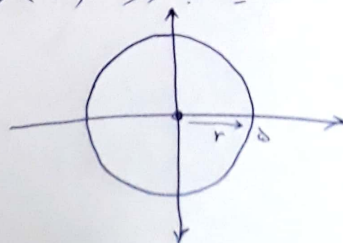
$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

در واقع این رابطه شامل تمام زوج مرتب‌هایی است که $x^2 + y^2 = 25$ باشد مثلاً

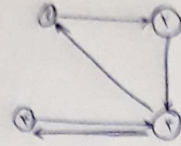
$$(-4, 3), (-3, 4), (-5, 0), (0, -5), (4, 3), (3, 4), (5, 0), (0, 5)$$

$$(-4, -3), (-3, -4), (-4, -4), \dots$$

• عبارتی مجموعاً تمام نقاط روی دایره‌ای به مرکز $(0, 0)$ در سطح ۵ می‌باشد



۲. عايش، صورت، طرف، عمت، طرف



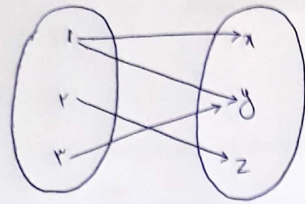
$$R = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4)\}$$

۳. عايش، صورت، عايش، (و لدری)

A \ B	1	2	3
x	1	0	1
y	0	1	1

$$R = \{(1,x), (3,x), (2,y), (3,y)\}$$

۴. عايش، صورت، تصويری



$$R = \{(1,x), (1,y), (2,y), (3,z)\}$$

نقطه: به الی مجموعه A، B و C داریم:

$$1) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$2) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$3) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$4) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

~

مثال ۳ فرض کنید $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{x, y\}$ ، $C = \{a, b\}$ در این صورت

$$A \times (B \cup C) = \{(1, x), (1, y), (1, a), (1, b), (2, x), (2, y), (2, a), (2, b)\}$$

در مرتب کردیم

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$$

$$A \times C = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

نتیجه

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

تعریف تابع:

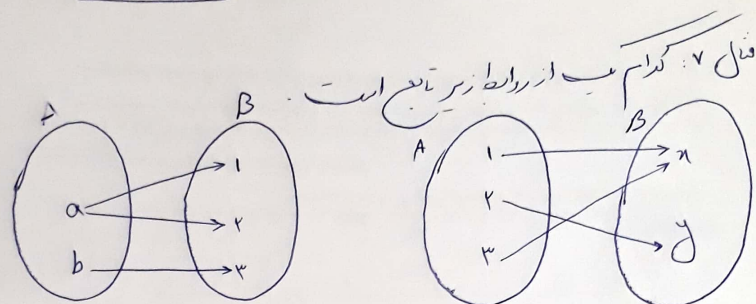
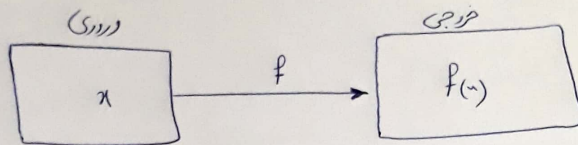
برای مجموعه غیر تهی A ، B ، نسبت یا تابع f از A به B را با نماد $f: A \rightarrow B$

نشان می دهند در واقع تابع ، رابطه ای از A به B است که هر عنصر A

دقیقا به عنوان اولین مولد هر زوج مرتب در این رابطه ظاهر می شود.

علامه بر این می توان گفت f مولف برای رابطه کردن هر $a \in A$

یک عنصر یکتای $b \in B$ است ، طوری که $f(a) = b$



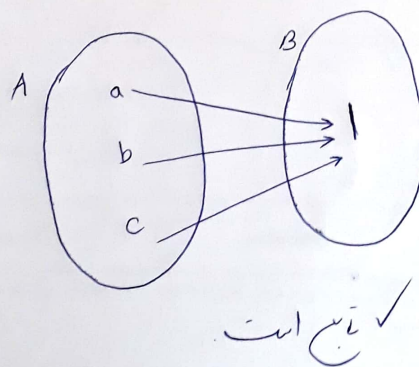
مثال ۷: کدام یک از روابط زیر تابع است.

تابع نیست چون a دو مقدار
تعداد گرفته است

✓ تابع است

$$f(a) = 1$$

$$f(a) = 2$$



✓ تابع است

تذکره

برای تابع $f: A \rightarrow B$ ، A حوزه نام تابع و B دام نام تابع f می نامیم

بربر مجموعه ای از B متشکل از عناصری که بتوان در این مجموعه درجهت مابین

f ظاهر می شود را بردار نام f می نامیم و آنرا $f(A)$ نشان می دهیم

مثال ۱: فرض کنید

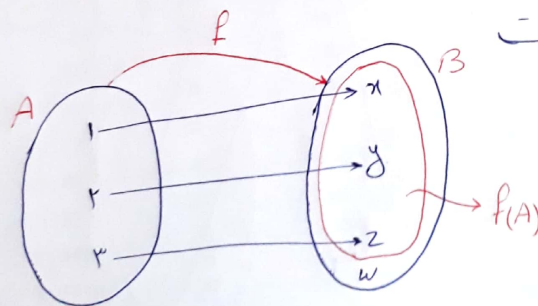
$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{و} \quad B = \{x, y, z, w\}$$

هسته نام
هسته نام

داریم

$$f = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$$

در این صورت



$$f(A) = \{x, y, z\} \subset B$$

ک: فرض کنید A و B مجموعه‌های متناهی، $|A| = m$ و $|B| = n$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \quad , \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

دانش صورت یک تابع نویسی $f: A \rightarrow B$ را می‌توان به نرم

$$\{(a_1, x_1), (a_2, x_2), \dots, (a_m, x_m)\}$$

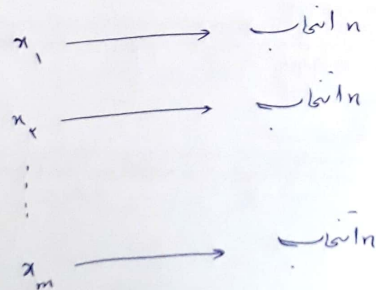
در نظر گرفت.

به جای x می‌توان هر یک از n عنصر از مجموعه B را انتخاب کرد

همچنین برای x_2 نیز می‌توان ارقام را از این تراشه انتخاب یا انتخابی

ارائه می‌دهیم در هر ارقام یکی از n عنصر B را به x_m نسبت دهیم

با ترانس



نمایش اصل ضرب به تعداد

$$\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{m} = n^m$$

تابع از A به B وجود دارد.

پس می توان گفت تعداد توابع که از مجموعه A به مجموعه B وجود دارد برابر است با:

$$\boxed{|A|^m = |B|^n}$$

مثال ۹: تعداد توابع از A به B وجود دارد بدست آورید.

$$A = \{1, 2, 3\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$|A| = 3 \quad \text{و} \quad |B| = 4 \quad \text{نمایش}$$

$$|B|^{|A|} = 4^3 = \underline{64}$$