

دانشکده فنی و حرفه ای دختران شیراز



آموزشکده فنی دختران الزهرا

ریاضی عمومی - رشته هنر

مدرس و مولف جزوه:

دکتر نوشاد

منبع:

ریاضی مقدماتی، آقای گرایه چیان



فصل اول:

* مجموعه

* توان

* رادیکال

جلسه دوم: توان و رادیکال



بخش دوم : توان

قوانین پایه ای توان

$a^1 = a$	مثال: $(\frac{2}{9})^1 = \frac{2}{9}$
$a^0 = 1$	مثال: $[(-\frac{5}{7})^3]^0 = 1$
$1^a = 1$	مثال: $1^{500} = 1$
$a^a = a$	مثال: $5^{500} = 5$



$a^m \times a^n = a^{m+n}$	مثال: $(-5)^5 \times (-5)^2 = (-5)^7$
$a^m \times b^m = (ab)^m$	مثال: $4^8 \times 3^8 = (4 \times 3)^8 = 12^8$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	مثال: $16^7 \div 16^4 = 16^{7-4} = 16^3$
$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	مثال: $10^{13} \div 20^{13} = \left(\frac{10}{20}\right)^{13}$



$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	مثال: $\left(\frac{3}{7}\right)^5 = \frac{3^5}{7^5}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	مثال: $6^{-5} = \frac{1}{6^5}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	مثال: $(2^3)^8 = 2^{3 \times 8} = 2^{24}$

نکته: در جمع و تفریق اعداد تواندار برای $a^m + a^n$ و یا $a^m - a^n$ قاعده خاصی وجود ندارد و

باید هر قسمت را جداگانه حساب کنیم.



نکته: برای محاسبه‌ی حاصل جمع جملات متشابه می‌توان آن را به ضرب تبدیل کرد.

$$\underbrace{a^m + a^m + a^m + \dots + a^m}_{a \text{ جمله}} = a \times a^m = a^{m+1}$$

مثال: $4^{10} + 4^{10} + 4^{10} + 4^{10} = 4 \times 4^{10} = 4^{11}$

مثال: $5^x + 5^x + 5^x + 5^x + 5^x = 5 \times 5^x = 5^{x+1}$



$$(a^m)^n = a^{mn}$$

نکته: دو عدد $(a^m)^n$ و a^{mn} لزوماً برابر نیستند.

مثال:
$$\begin{cases} (2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6 \\ 2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 \end{cases} \Rightarrow (2^3)^2 \neq 2^{3^2}$$

نکته: اگر n عددی زوج باشد و $a \neq 0$ باشد آنگاه: $(-a)^n \neq -a^n$

مثال:
$$\begin{cases} (-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81 \\ -3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81 \end{cases} \Rightarrow (-3)^4 \neq -3^4$$



محاسبات چپری توانی

سوال : اگر $3^a = 7$ و $7^b = 3$ باشد ، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید

ب : 21^{ab}

الف : 3^{2ab}

$$3^{2ab} = (3^a)^{2b} = 7^{2b} = (7^b)^2 = 3^2 = 9$$

$$21^{ab} = (3 \times 7)^{ab} = 3^{ab} \times 7^{ab} = (3^a)^b \times (7^b)^a = 7^b \times 3^a = 3 \times 7 = 21$$



معادلات توانی

به هر معادله ای که مجهول در توان قرار گرفته باشد معادله توانی یا نمایی می گوئیم

برای حل این معادلات کافی است پایه ها را مساوی کنیم تا بتوانیم توان ها را نیز با هم مساوی کنیم

$$3^{2x-10} = 1$$

$$a^b = 1$$

$$3^{2x-10} = 3^0 \rightarrow 2x - 10 = 0 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$$



بخش سوم: رادیکال

نکته: اگر عدد منفی به توان زوج برسد، حاصل عددی مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصل عددی منفی است.

ریشه‌ی دوم و سوم اعداد

ریشه‌ی دوم اعداد حقیقی؛ دو عدد حقیقی a و $-a$ را ریشه‌های دوم عدد حقیقی و مثبت b گوئیم هرگاه $a^2 = b$. به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم b می‌نامیم.

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارند، زیرا مربع هیچ عدد حقیقی منفی نمی‌شود.



ریشه‌ی سوم اعداد حقیقی؛ عدد a را ریشه‌ی سوم عدد حقیقی b گویند هرگاه $a^3 = b$

نکته: هر عدد حقیقی فقط یک ریشه‌ی سوم دارد که هم علامت پا خود عدد است.

مثال:

عدد ریشه	۳۶		-۶۴	۱۷	
ریشه‌های دوم	-۶	۶	ریشه دوم ندارد	$\sqrt{۱۷}$	$-\sqrt{۱۷}$
ریشه‌ی سوم	$\sqrt[3]{۳۶}$		$\sqrt[3]{-۶۴} = -۴$	$\sqrt[3]{۱۷}$	



ریشه‌ی n ام:

a را ریشه‌ی n ام عدد b گوئیم هرگاه: $a^n = b$

* اگر n عددی فرد باشد، b تنها یک ریشه‌ی n ام دارد که با نماد رادیکال به صورت $\sqrt[n]{b}$ نمایش داده میشود.

* اگر n عددی زوج باشد، عدد مثبت b دو ریشه‌ی n ام قرینه‌ی هم دارد که با نماد رادیکال به صورت $\sqrt[n]{b}$ و $-\sqrt[n]{b}$ نمایش داده میشود.

نکته: هرگاه n زوج باشد عبارت زیر رادیکال حتماً باید مثبت باشد و برای اعداد منفی تعریف نمی‌شود.



مخرج کردن عامل از زیر رادیکال؛ عبارتی در زیر رادیکال که توانش با فرجه ی زیر رادیکال برابر یا ضریبی از آن باشد از زیر رادیکال بیرون می آید.

مثال	فرمول
$\sqrt[6]{(-3)^6} = -3 = 3$ $\sqrt[7]{-128} = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2$	$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & , n \text{ زوج} \\ a & , n \text{ فرد} \end{cases}$
$\sqrt[6]{192} = \sqrt[6]{2^6 \times 3} = 2\sqrt[6]{3}$ $\sqrt[5]{224} = \sqrt[5]{2^5 \times 7} = 2\sqrt[5]{7}$	$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a \sqrt[n]{b} & , n \text{ زوج}, b \geq 0 \\ a \sqrt[n]{b} & , n \text{ فرد} \end{cases}$



وارد کردن ضریب به زیر رادیکال؛

برای وارد کردن ضریب به داخل رادیکال، ضریب را به توان فرجه رسانده و در عبارت زیر رادیکال ضرب می کنیم. اگر فرجه فرد باشد، عدد چه مثبت و چه منفی، می تواند به زیر رادیکال برود. **در صورت منفی بودن a ، اگر n زوج باشد باید علامت منفی بیرون رادیکال بماند.**

$$a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & , n \text{ فرد} \\ \sqrt[n]{a^n b} & , a > 0, n \text{ زوج} \\ -\sqrt[n]{a^n b} & , a < 0, n \text{ زوج} \end{cases}$$



مثال؛

$$3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \times 5} = \sqrt[3]{135}$$

$$-2\sqrt[5]{4} = -\sqrt[5]{2^5 \times 4} = -\sqrt[5]{128} \quad \text{یا} \quad \sqrt[5]{(-2)^5 \times 4} = \sqrt[5]{-128}$$

$$7\sqrt{2} = \sqrt{7^2 \times 2} = \sqrt{98}$$

$$-2\sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{2^4 \times 5} = -\sqrt[4]{80}$$



قوانین ریشه n ام؛ در جدول زیر وقتی فرجه زوج است باید زیر رادیکال نامنفی باشد.

مثال	فرمول
$\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
$\sqrt[5]{\frac{32}{27}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{27}} = \frac{\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^3}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$(\sqrt[4]{2})^6 = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{6^2}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$



مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید؛

$$\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-4} \times \sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[3]{-2 \times -4} \times |-2| = \sqrt[3]{8} \times 2 = 2 \times 2 = 4$$

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-2^4} = \sqrt[3]{3^3 \times 3} + \sqrt[3]{(-2)^3 \times 3} = 3\sqrt[3]{3} + (-2)\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt{50} - \sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{3^2 \times 3} + \sqrt{2^2 \times 3} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

نکته: اگر a مثبت باشد: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \times k]{a^{m \times k}}$ از این نکته برای هم فرجه کردن و ضرب رادیکال

ها استفاده می‌شود. (می‌توان ریشه و توان را در یک عدد طبیعی ضرب یا تقسیم کرد)

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt{5} = \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{4 \times 125} = \sqrt[6]{500}$$



نکته: اگر a مثبت باشد: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ یا $(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ از این نکته برای تبدیل رادیکال ها به توان و برعکس استفاده می شود.

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{37} = 37^{\frac{1}{5}}$$

$$16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[4]{2^{20}} = 2^5 = 32$$

$$125^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{125^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{125^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^9}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^8 \times 5}} = \frac{1}{25\sqrt{5}}$$



تمرین

حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف)
$$\frac{(6^{10} \times 4^{10}) \div 2^{42}}{(8^5 \div 4^5) \times 2^3} =$$

ب)
$$\left(\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} \times \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} \right) - \left(\frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}}{3} \right) =$$



The
End

