

جلسه سوم:

یادآوری جلسه گذشته:

با توجه به شرط تابع حتمی مثال زیر را حل کنید

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع حتمی احتمال زیر باشد

$$P_X(x) = \begin{cases} C(1+x) & 2 < x < 5 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

الف - مقدار C را تعیین کنید

ب - تابع توزیع را بدست آورید

شرط تابع حتمی

$$\int_2^5 C(1+x) dx = 1 \Rightarrow C \left[x + \frac{1}{2}x^2 \right]_2^5 = 1$$

$$\Rightarrow C \left[\left(5 + \frac{25}{2} \right) - \left(2 + \frac{4}{2} \right) \right] = 1$$

$$\Rightarrow C(17.5 - 4) = 1 \Rightarrow 13.5C = 1 \Rightarrow \frac{2}{27}C = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{27}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{2}{27} \left(x + \frac{1}{2}x^2 - 4 \right) & 2 < x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x P_X(t) dt = \int_2^x \frac{2}{27} (1+t) dt = \frac{2}{27} \left(t + \frac{1}{2}t^2 \right)_2^x = \frac{2}{27} \left(x + \frac{1}{2}x^2 - 4 \right)$$

امید ریاضی: در واقع مقدار مورد انتظار از متغیر X استتعریف: فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $P_X(x)$ باشد امید ریاضی X یا میانگین

$$E(X) = \sum x P_X(x) \quad \text{اگر } X \text{ گسسته باشد}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x P_X(x) dx \quad \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد}$$

* راب صورت

مثال ۲: اگر تابع چگالی X به صورت زیر تعریف شده باشد میانگین یا امید ریاضی X را بیابید

x	۰	۱	۲	۳
$P_x(x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

حل:
بر اساس فرمول قبلی

$$E(X) = \sum x P_x(x) = 0 \times \frac{1}{56} + 1 \times \frac{15}{56} + 2 \times \frac{30}{56} + 3 \times \frac{10}{56}$$

$$= \frac{105}{56} \approx 1.9$$

مثال ۲: فرض کنید متغیر تصادفی X نشانگر طول عمر نوعی لاستیک بر حسب سال باشد که دارای تابع چگالی زیر است

$$P_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مؤوسط طول عمر این نوع لاستیک را بیابید
حل:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x P_x(x) dx = \int_0^{\infty} x \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx = (-x-2) e^{-\frac{1}{2}x} \Big|_0^{\infty}$$

$$= 2$$

پس انتظار داریم این نوع لاستیک به طور متوسط ۲ سال عمر کند

تذکره:
برای محاسبه اشتدال بالا باید از روش جزیه به جز حل کنیم

$$\int x \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx = \int x = u \rightarrow du = dx$$

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = dv \rightarrow v = -e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\therefore \int x \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx = u \cdot v - \int v du$$

$$= -x e^{-\frac{1}{2}x} - \int -e^{-\frac{1}{2}x} dx = -x e^{-\frac{1}{2}x} - 2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$① \quad E(ax \pm bY) = aE(x) \pm bE(Y)$$

$$② \quad E(ax + b) = aE(x) + b$$

$$③ \quad E(XY) = E(X)E(Y)$$

اگر x و y مستقل باشند آنگاه

واریانس:

$$V(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(g(x)) = \sum g(x) f_x(x)$$

اگر x گسسته باشد

$$\int g(x) f_x(x) dx$$

اگر x پیوسته باشد

مثال: اگر x متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد مطلوب است محاسبه $E(1/x)$ و $E(x)$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x=2, 4, 8, 16 \\ 0 & \text{در سراسر نقاط} \end{cases}$$

$$V(x) \quad \text{و} \quad E(x^2)$$

حل:

$$E(x) = \sum x f_x(x) = 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{16} + 8 \times \frac{1}{64} + 16 \times \frac{1}{256} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = \sum \frac{1}{x} f_x(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \times \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \times \frac{1}{256} = \frac{1+4+16+64}{65536} = \frac{15}{65536}$$

$$E(x^2) = 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{16} + 8^2 \times \frac{1}{64} + 16^2 \times \frac{1}{256} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 4 - \left(\frac{15}{16}\right)^2 = \frac{101}{64}$$

$$E(x^2) = (2^2 + 4^2 + 8^2 + 16^2) \times \frac{1}{256} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = 100 - 59.60 = 40.40$$

۴ کواریانس: کواریانس X و Y را بنام $Cov(X, Y)$ یا σ_{XY} نمایش می دهند

$$Cov(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

مثال: تابع حتمی دو متغیر X و Y به صورت زیر داده شده مطلوب است محاسبه $Cov(X, Y)$

$Y \backslash X$	0	1	$P_Y(y)$
0	1/1	1/2	1/3
1	1/4	1/2	1/6
2	1/1	0	1/1
$P_X(x)$	1/6	1/4	

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

حل: *

$$E(X) = 0 \times 1/6 + 1 \times 1/4 = 1/4$$

$$E(Y) = 0 \times 1/3 + 1 \times 1/6 + 2 \times 1/1 = 1/1$$

$$E(XY) = 0 \times 0 \times 1/1 + 0 \times 1 \times 1/2 + 1 \times 0 \times 1/4 + 1 \times 1 \times 1/2 + 2 \times 0 \times 1/1 + 2 \times 1 \times 0 = 1/2$$

$$\therefore Cov(X, Y) = 1/2 - 1/4 \times 1/1 = -1/4$$

مثال ۲: مطلوب است در مثال بالا $Cov(2X - 4Y, 3X)$ را به دست آورید

$$Cov(2X - 4Y, 3X) = 6 Cov(X, X) = 6 V(X) \quad \text{حل:}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 1/6 + 1^2 \times 1/4 \Rightarrow E(X^2) = 1/4$$

$$V(X) = 1/4 - (1/4)^2 = 1/4 - 1/16 = 3/16$$

- ① $\text{Cov}(X, X) = V(X)$
- ② $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- ③ $\text{Cov}(X, c) = 0$
- ④ $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$
- ⑤ $V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$
 اگر X و Y مستقل از هم باشند آنگاه
- ⑥ $V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$
- ⑦ $\text{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a \text{Cov}(X_1, Y) + b \text{Cov}(X_2, Y)$

مثال: مقدار $V(3X - 2Y + 5)$ را در مثال قبل بدست آورید

$$V(3X - 2Y + 5) = 9V(X) + 4V(Y) - 12\text{Cov}(X, Y)$$

$$V(X) = 1/24$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \Rightarrow V(Y) = 1 - (1/8)^2 = 1/4$$

$$E(Y^2) = 1 \times 1/6 + 2^2 \times 1/4 = 1$$

$$\therefore V(3X - 2Y + 5) = 9 \times 1/24 + 4 \times 1/4 - 12 \times (-1/12)$$

ضرب همبستگی: ضریب همبستگی دو متغیر X و Y یعنی میزان رابطه خطی دو متغیر تصادفی X و Y که با استفاده از رابطه زیر قابل محاسب است

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}}$$