

بسمه تعالی

حیدری (۹۸، ۱۲، ۷)

حاجه نسیم

ریاضی عمومی ۱

فصل ۲: توابع برای حرکت در فضا

همان‌گونه که یک ذره در فاصله زمانی I در فضا حرکت می‌کند، مختصات ذره را می‌توان تابعی از زمان نامید I تقریب شده، در نظر می‌گیریم

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I \quad (1)$$

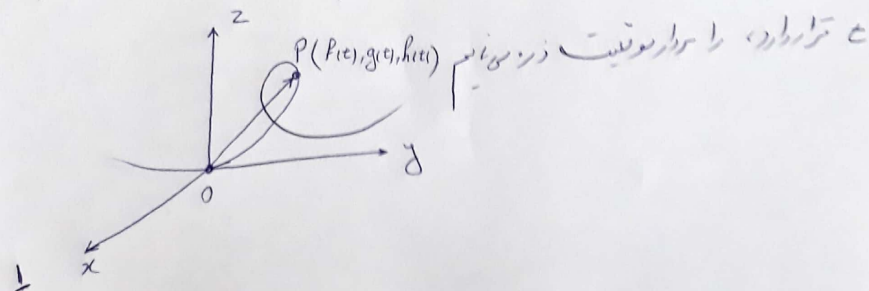
نقاط $(f(t), g(t), h(t)) = (x, y, z)$ برای $t \in I$ ، در فضای سه‌بعدی قرار می‌گیرند

که آن را مسیر ذره می‌نامیم. معادلات فاصله‌ای که در رابطه (۱) بیان شده،

شکل پارامتری منحنی است. بردار زیر

$$r(t) = \vec{OP} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

که اندای آن در فضا، اندای آن نقطه $P(f(t), g(t), h(t))$ در هر لحظه



مسئله عنوان هم در نظر گرفته شود که در مباحث ریاضی I برابر مدار cr و خود را به

نکته (۱)، r را بصورت تابع برای از تغییر حقیقی t در مباحث I تقریب

می کند

مثال: تابع برای

$$r(t) = (\cos t) i + (\sin t) j + t k$$

برای نام مقادیر حقیقی t تقریب ثابت هم انجام داده بودیم r را به این است

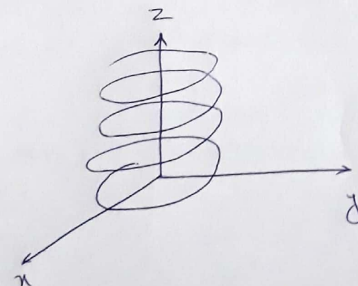
هم در آن استوانه قرار می گیرد، چرا که فرایب z و t که مولفه های r از r هستند

x و y از r است در مباحث استوانه صحن می کند

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

معمولاً انداز مولد k نیز $z = t$ را می بینیم در مباحث ما داریم

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = t$$



تعریف: فرض کنید $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ یک تابع برداری، L یک بردار باشد.
در این صورت می‌گوییم $r(t)$ به L میل می‌کند وقتی که t به t_0 میل می‌کند اگر برای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ موجود باشد که برای هر t که $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |r(t) - L| < \epsilon$.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$$

که $\epsilon > 0$ هر $\delta > 0$ ، $\delta > 0$ موجود باشد که برای هر t که $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |r(t) - L| < \epsilon$.

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |r(t) - L| < \epsilon$$

مثلاً اگر $L = L_1 i + L_2 j + L_3 k$ باشد آنگاه $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$ (یعنی $r(t)$ به L میل می‌کند) است.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = L_3$$

سپاریم:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \right) i + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right) j + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \right) k$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} r(t) \quad \text{مثلاً: اگر } r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk \text{ باشد}$$

پس داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos t \right) i + \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin t \right) j + \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} t \right) k$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j + \frac{\pi}{4} k$$

تقریب تابع برای $r(t)$ در نقطه $t = t_0$ و این در نظرش پیوسته است.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0) \quad (1)$$

(2) تابع گسسته پیوسته است که در هر نقطه از نظر خود پیوسته باشد.

* آزمون بولای برای پیوستگی در یک نقطه:

تابع برای $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ در نقطه $t = t_0$ پیوسته است

اگر تنها اگر f, g, h در نقطه $t = t_0$ پیوسته باشند.

مثال: تابع $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$ پیوسته است زیرا هر یک از توابع

$f(t) = \cos t$ ، $g(t) = \sin t$ و $h(t) = t$ پیوسته هستند.

مثال: تابع $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + [t]k$ پیوسته نیست زیرا تابع $h(t) = [t]$

از این هر یک صحیح پیوسته است.

شتی تابع برداری:

تابع برداری $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ در نقطه $t = t_0$ شتی برابر است با

$f(t_0)$ ، $g(t_0)$ ، $h(t_0)$ در نقطه $t = t_0$ شتی برابر است.

همین r را شتی بردار می‌گویند که در هر نقطه از قطر خود شتی برابر است.

نقطه‌ای که r در آن شتی برابر است، شتی آن به صورت بردار است.

$$\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{df}{dt} i + \frac{dg}{dt} j + \frac{dh}{dt} k.$$

مثال: بردار $r(t) = (3 \cos t)i + (3 \sin t)j + t^2 k$ در نقطه $t = 0$ برابر است با

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d(3 \cos t)}{dt} i + \frac{d(3 \sin t)}{dt} j + \frac{d(t^2)}{dt} k$$

$$= (-3 \sin t)i + (3 \cos t)j + 2t k.$$

قوانین مشتق برای توابع برداری:

فرض کنید c برداری است، $f(t)$ تابعی برداری که u, v توابع برداری
مشتق پذیر باشند، بدین صورت داریم:

$$1) \frac{d c}{d t} = 0$$

$$2) d(cu) = c \frac{du}{dt}$$

$$3) d(fu) = \frac{df}{dt} u + f \frac{du}{dt}$$

$$4) d(u+v) = du + dv$$

$$5) d(u-v) = du - dv$$

$$6) d(u \cdot v) = \frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dt} \quad (\text{قاعده ضرب داخلی})$$

$$7) d(u \times v) = \frac{du}{dt} \times v + u \times \frac{dv}{dt}$$

8) قاعده زنجیره‌ای: اگر r تابعی برداری مشتق پذیر در حیطه t ، t تابعی در حیطه s
باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds}$$

فصل: فرض کنید

$$r(t) = (\sin t)i + (\cos t)j + tk$$

$$v(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + k$$

در این صورت

$$1) \frac{d(r+v)}{dt} = \frac{d(r(t) + v(t))}{dt}$$

$$= \frac{dr(t)}{dt} + \frac{dv(t)}{dt}$$

$$= ((\cos t)i + (-\sin t)j + 1k) + ((-\sin t)i + \cos t j)$$

$$= (\cos t - \sin t)i + (-\sin t + \cos t)j + k$$

$$2) \frac{d(u \cdot v)}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$= (\cos t, -\sin t, 1) \cdot (\cos t, \sin t, 1)$$

$$+ (\sin t, \cos t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$= (\cos^2 t - \sin^2 t + 1) + (-\sin^2 t + \cos^2 t + 0)$$

$$= 2\cos^2 t - 2\sin^2 t + 1$$

مسئله ۱: برای

اگر بردارهای $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ روی بازه $[a, b]$ تعریف شده باشند

آنگاه تابع برداری r نیز انتگرال پذیر است و انتگرال آن برابر است با:

$$\int_a^b r(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) i + \left(\int_a^b g(t) dt \right) j + \left(\int_a^b h(t) dt \right) k.$$

مثال: تابع برداری $r(t) = \cos t i + j - t^2 k$ را در بازه $[0, \pi]$ انتگرال بگیریم.

$$\int_0^\pi r(t) dt = \int_0^\pi (\cos t i + j - t^2 k) dt$$

$$= \left(\int_0^\pi \cos t dt \right) i + \left(\int_0^\pi 1 dt \right) j + \left(\int_0^\pi -t^2 dt \right) k$$

$$= \sin t \Big|_0^\pi + t \Big|_0^\pi - \frac{t^3}{3} \Big|_0^\pi$$

$$= (\sin(\pi) - \sin(0)) i + (\pi - 0) j - \left(\frac{\pi^3}{3} - 0 \right) k$$

$$= \pi j - \frac{\pi^3}{3} k.$$