$w^R=$ معکوس رشته w

$w = abc \to w^R = cba$

تعریف بازگشتی عملگر معکوس:

$$w \in \Sigma^* \to \begin{cases} |w| = 0 \to w^R = w, (\lambda^R = \lambda) \\ |w| \neq 0 \to w = u.a, u \in \Sigma^*, a \in \Sigma \to w^R = a.u^R \end{cases}$$

مثال:

$$W = xyz \to (xyz)^R = (xy.z)^R = z.(xy)^R = zy.(x)^R = zy.(\lambda.x)^R = zyx.\lambda^R = zyx$$

نکته:

$1 - w^{n+1} = w^n.w = w.w^n$

$2 - w^2 = w.w$

$3 - (w^R)^R = w$

$4 - (w^n)^R = (w^R)^n$

مثال:

$$w = ab \to (w^3)^R = (ab.ab.ab)^R = bababa \leftrightarrow (w^R)^3 = (ba)^3 = bababa$$

عملگر * :

اگر $a \in \Sigma$، آنگاه a^n رشته ای است که از n تا حرف a تشکیل شده است ولی a^* به معنی تعداد نامشخص تکرار از حرف a که مطمئنا هر عددی بین صفر تا n می تواند به جای * بنشیند و داریم $a^0 = \lambda$

$a^3 = a.a.a$

$a^* = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, ...\}$

در مورد زبان های زیر توضیحی مختصر بدهید.

$l_1 = \{a, ab, abb\}$

زبان l_1 زبانی است روی الفبای $\Sigma = \{a,b\}$ که تعدادی متناهی عضو دارد که با نماد a شروع می شوند.

$l_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

زبان l_2 زبانی است روی الفبای $\Sigma = \{a,b\}$ که به صورت جمله عمومی نشان داده شده است در این زبان به تعداد n تا a (صفر یا بیشتر) و به دنبال آن به همین تعداد حرف b نشان داده می شود. به عبارتی $l_2 = \{\lambda, ab, aabb, \ldots\}$

$l_3 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$

زبان l_3 زبانی است روی الفبای $\Sigma = \{a,b\}$ که به صورت جمله عمومی نشان داده شده است در این زبان به تعداد n تا a (صفر یا بیشتر) و به دنبال آن m تعداد حرف b (صفر یا بیشتر) نشان داده می شود. به عبارتی $l_3 = \{\lambda, abbb, aaabb, ab, a, b, bbb, \ldots\}$

$l_4 = \{a^* b^*), \Sigma = \{a,b\}$

این زبان همان زبان قبلی می باشد. منتهی به شکل دیگر(عبارت منظم)

$l_5 = \{(ab)^* \mid a, b \in \Sigma$

این زبان تعدادی ab (صفر یا بیشتر) را پشت سر هم تکرار می کند به عبارتی $l_5 = \{\lambda, ab, abab, ababab, \ldots\}$

$l_6 = \{(ab)^*.a \mid a, b \in \Sigma\}$

این زبان همان زبان قبلی است با این تفاوت که به انتهای رشته های زبان قبلی یک a اضافه می کند به عبارتی $l_6 = \{a, aba, ababa, \ldots\}$

عملگر $\cup$ یا $|$:

وقتی می نویسیم $(A \mid B)$ که A و B رشته هائی روی الفبای خاصی هستندیعنی انتخاب رشته A یا B نه هر دوی آنها همزمان.

$l_7 = \{a^*(a \mid b)^* b^* \mid a, b \in \Sigma\} \Rightarrow l_7 = \{\lambda, a, aa, b, abb, aba, \ldots\}$

$l_8 = \{(a \mid b)^* \mid a, b \in \Sigma\} \Rightarrow l_8 = \{\lambda, a, ab, ba, bbaa, aabbb, \ldots\}$

$(a \mid b)^*$ در هر مورد تکرارعملگر * می تواند a یا b را انتخاب کند. در واقع تمامی رشته های قابل تولید بر روی a و b می تواند از این ساختار تولید شود.

مثال: زبان l_9 و l_{10} چه رشته هائی را تولید می کنند.

$l_9 = \{(a \mid b \mid c)^*, \Sigma = \{a,b,c\}\}$
$l_{10} = \{(a \mid bc)^*, \Sigma = \{a,b,c\}\}$

حل: زبان l_9 ، Σ^* را تولید می کند($l_9 = \Sigma^*$) و زبان l_{10} هر ترکیبی از a و bc ها را تولید می کند.

عبارات منظم(باقاعده):

1- اگر Σ الفبای مورد نظر باشد، هر عضو Σ یک عبارت منظم است

2- اگر α عبارت منظم باشد، α^* هم منظم است

3- اگر α و β عبارت های منظم باشند $\alpha\beta$ هم منظم است(عبارات منظم نسبت به عمل الحاق بسته اند)

4- اگر α و β عبارت های منظم باشند $(\alpha \mid \beta)$ هم منظم است

5- اگر l زبان منظمی باشد آنگاه $\bar{l}$ یعنی متمم زبان l، هم منظم است

مثال: عبارت روبرو منظم است یا نه؟ $r = (a^*(a \mid b)^*)^*, \Sigma = \{a,b\}$

توضیح:

a عضو الفباء است پس منظم است به توجه به بند 2 ، a^* هم منظم است بنا به بند 3، $(a \mid b)$ هم منظم است پس $(a \mid b)^*$ هم منظم است و $(a \mid b)^*$ به آخر a^* ملحق شده است پس عبارت $a^*(a \mid b)^*$ منظم است پس بستار ستاره آن هم که همان عبارت r است منظم است.

زبان منظم: زبانی را منظم گویند اگر بتوان برای آن عبارت منظمی پیدا کرد.

مثال: ثابت کنید که زبان های زیر منظم اند(با پیدا کردن عبارات منظم)

$l_1 = \{1, 01. 001, 0001, \ldots\}, \Sigma = \{0,1\}$ حل: عبارت منظم (0^*1) تولید کننده زبان l_1 است.

$l_2 = \{w \in \Sigma^* \mid length(w) = 2k, k \geq 0\}, \Sigma = \{a,b\}$

حل: زبان بالائی منجر به تولید رشته هائی می شود که ترکیب های مختلفی از 4 رشته ba, ab, bb, aa را دارا هستند، یعنی ما می توانیم هر رشته عضو زبان l رابه رشته هائی با طول 2 به رشته های گفته شده تجزیه کنیم حال می توانیم عبارت $(ab \mid ba \mid bb \mid aa)^*$ را که یک عبارت منظم است بنویسیم ، بدیهی است که این عبارت منظم زبان را توصیف می کند. همچنین عبارت منظم $((a+b)(a+b))^*$ نیز همین زبان را تولید می کند.

مثال: ثابت کنید متمم زبان قبلی منظم است.

ابتدا متمم زبان را می نویسیم ($\bar{l} = \Sigma^* - l$) $\leftarrow$ $\bar{l} = \{w \in \Sigma^* \mid length(w) = 2k+1, k \in z^+\}$

واضح است که عبارت منظم $(ab \mid ba \mid bb \mid aa)^*(a \mid b)$ زبان $\bar{l}$ را تولید می کند

مثال: ثابت کنید زبان l منظم است $l = \{w \in \Sigma^* \mid length(w) = 3k, k \geq 0, \Sigma = \{a,b\}$

حل: این زبان رشته هائی را از Σ^* شامل می شود که طولشان مضربی از سه باشد. $(aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bbb + bba)^* = (\Sigma^3)^* = ((a+b)(a+b)(a+b))^*$

مثال: متمم زبان مثال قبل را بنویسید.

توضیح:متمم این زبان رشته هائی را شامل می شود، که آن رشته ها را به سه تائی هائی تجزیه کنیم نهایتا در آخر رشته یک کاراکتر و یا دو کارکتر اضافه خواهد ماند پس می توانیم عبارت منظم مربوط به این زبان را به شکل $(\Sigma^3)^*(\Sigma^2 \mid \Sigma)$ بنو یسیم

☐کلا می توان گفت زبان هائی که با این تعریف توصیف می شوند یعنی زبان هائی ک شامل رشته هائی هستند که روی الفبای (a,b) طولشان مضرب n است منظم اند.

☐در حالت کلی متمم زبان هائی که رشته هائی به طول مضرب n دارند، به شکل زیر است.

$(\Sigma^n)^*(\Sigma \mid \Sigma^2 \mid \Sigma^3 \mid \ldots \mid \Sigma^{n-1})$

مثال: ثابت کنید که زبان l منظم است. $l = \{w \in \Sigma^* \mid n_{(b)}(w) = 2\},\ \Sigma = \{a,b,c\}$

این زبان رشته هائی از Σ^*را شامل می شود که فقط و فقط دو حرف b دارند $(a \mid c)^* b (a \mid c)^* b (a \mid c)^*$

مثال: ثابت کنید که زبان l منظم است. $l = \{w \in \Sigma^* \mid n_{(b)}(w) + n_{(c)}(w) = 3\}, \Sigma = \{a,b,c\}$

این زبان رشته هائی از Σ^*را شامل می شود که تعداد تکرار b ها و c ها مجمو عا در آن برابر 3 باشد. $a^*(b+c)a^*(b+c)a^*(b+c)a^*$

مثال: ثابت کنید که زبان l منظم است $l = \{w \in \Sigma^* \mid 200 \le w \le 700\}, \Sigma = \{0,1,2,\ldots 9\}$

جواب. $(2+3+4+5+6)(\Sigma^2) \mid (700)$

1- یک عبارت منظم برای زبان $l = \{a^n b^m \mid n \ge 1, m \ge 1, nm \ge 3\}$ بنویسید

$l = a^* abbbb^* + a^* aaabb^* + a^* aabbb^*$

2- عبارت منظمی بنویسید که شامل رشته ای از صفر ها و یک ها هستند و با یک شروع می شوند و شامل دو صفر متوالی نیستند.

$(1+10)^*$

3- عبارات منظم برای زبان های زیر روی $\Sigma = \{a,b\}$ بنویسید

$l_1 = \{w \in \Sigma^* \mid n_a(w) \bmod 3 = 0\}$

$l_2 = \{w \in \Sigma^* \mid n_a(w) \bmod 5 > 0\}$

حل: $l_1 = (b^* ab^* ab^* ab^*)^*$ و $l_2 = (b^* ab^* ab^* ab^* ab^* ab^*)(b^*(a+\lambda)b^*(a+\lambda)b^*(a+\lambda)b^* ab^*)$

4- یک توصیف ساده از زبان $l = ((aa)^* b (aa)^* + a(aa)^* ba(aa)^*)$ ارائه کنید.

حل: تمام رشته هائی از a و b که شامل فقط یک b و تعداد a در آن زوج باشد.

5- یک عبارت منظم برای مجمو عه $\{a^n b^m \mid n+m = \text{زوج}\}$ بنویسید.

حل: $(aa)^* a (bb)^* b + (aa)^* (bb)^*$ یا $(aa)^*(ab+\lambda)(bb)^*$

6-یک عبارت منظم برای زبان $l = \{ab^n w \mid n \ge 3, w \in (a \mid b)^+\}$

حل: $abbbb^*(a+b)^+$